

Conception Des Indicateurs Riva (Risk-Value), Psv (Project Safe Value) Et Rpr (Risk- Profitability Ratio) Pour L'evaluation Des Risques En Projets D'investissement

Dr. Mohamed Taha Lahrech

Département des Sciences Humaines, Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II, Maroc

Résumé : Problématique : L'acceptation d'un projet économique ou sa préférence à d'autres projets alternatifs relève habituellement de leurs rentabilités respectives. Toutefois, lorsque les risques associés aux projets sont de grandeurs différentes, et que le projet le plus rentable s'avère être le plus risqué, le raisonnement unilatéral par la rentabilité n'est plus décisif. A ce moment-là, une approche dualistique devrait être adoptée afin de tenir compte de la rentabilité et du risque simultanément.

Objectif : L'objectif est de mettre au point un outil d'aide à la décision bidimensionnel, qui pondère la rentabilité au risque associé, permettant ainsi de comparer les projets sur une base égale.

Méthode : Pour mettre au point cet outil, nous rechercherons une application particulière de la formule Black-Scholes et de la simulation de Monte Carlo, afin d'obtenir une formule qui permet de calculer la valeur économique du risque d'un projet réel, et partant, agréger la rentabilité et le risque en un indicateur commun.

Résultat : Cette recherche aboutit sur trois indicateurs, en approches paramétriques et semi-paramétriques, que sont : la Risk-Value (RiVa) représentant la valeur du risque, la Project Safe Value (PSV) représentant la VAN agrégée à la RiVa, et le Ratio Rentabilité-Risque (RPR) représentant le rapport de la RiVa à la VAN.

Mots-clés : Valeur sure de projet, PSV, Risk-value, RiVa, Ratio rentabilité-risque, RPR, Analyse de projet, Analyse du risque, Options réelles, Black-Scholes, Mouvement Brownien géométrique, Simulation de Monte Carlo, Datar-Mathews.

Codes JEL: G2, M2.

Date of Submission: 17-09-2019

Date of Acceptance: 02-10-2019

I. Introduction Et Problematique

En choix d'investissement, les projets économiques sont habituellement conçus, choisis ou classés par ordre de rentabilité prévisionnelle (VAN, TRI, etc.) en premier plan. Les analyses relatives à l'incertitude et au risque associé aux projets est souvent menée, lorsque c'est le cas, à titre facultatif et dans un objectif d'éclairage seulement. En effet, les résultats des tests de sensibilité et de la simulation de Monte Carlo se présentent sous forme de graphiques et de statistiques qui sont très révélateurs certes, mais qui n'apparaissent pas au niveau de l'indicateur-clé ultime qui détermine le choix d'investissement. Cela fait qu'après toutes les analyses qui peuvent être conduites, la classification des projets est souvent réduite en fin de compte à une comparaison des rentabilités, indépendamment du risque porté par chacun. Cette perspective unidimensionnelle peut être à l'origine de choix d'investissement biaisés, car le projet le plus rentable a priori peut être éventuellement le plus risqué, et donc, moins désirable aux yeux d'un investisseur averse au risque.

Ce propos est illustré ci-dessous par le tableau 1. Le projet 1, qui est dans notre cas le plus rentable avec une valeur espérée de 12 MDH, n'a que 55% de chance de succès, ce qui réduit sa valeur décisionnelle aux yeux d'un manager décidément perplexe. Il lui sera difficile de choisir entre 12 MDH avec 55% de chances de succès, 10 MDH avec 77% de chances de succès et 8 MDH avec 90% de chances de succès. Aucun critère objectif n'étant disponible pour départager ces projets, les managers devront faire preuve de subjectivité et d'intuition pour comparer la rentabilité au risque encouru et prendre leur décision. Certains de ces managers opteront par exemple pour le projet 3 car ils jugeront meilleur de « sécuriser » la rentabilité plutôt que de « l'augmenter avec moins de garanties ».

Tableau 1: Exemple d'un choix d'investissement avec rentabilité confrontée au risque

| Projets examinés | Où investir ? | | |
|---|---------------|----------|----------|
| | Projet 1 | Projet 2 | Projet 3 |
| Rentabilité (VAN) | 12 MDH | 10 MDH | 8 MDH |
| Probabilités de succès (par la simulation Monte Carlo) | 55% | 77% | 90% |

Devant l'indécision objective des managers concernant ces 3 projets, dont les rentabilités sont pourtant bien distinctes, la considération de la rentabilité comme étant le critère principal a démontré ses limites. Par ailleurs, la recherche de l'investissement le plus rentable n'est pas toujours l'objectif primordial. Parfois, il s'agit de rechercher le moins risqué. Les petits agriculteurs optent souvent pour des variétés moins productives mais résistantes, comme ils procèdent à la diversification de leurs cultures et de leurs activités juste pour se prémunir du risque d'une mauvaise année. Par conséquent, ils ne bornent pas leurs attentes à la simple maximisation des bénéfices, mais préfèrent œuvrer à minimiser les pertes.

L'équilibre rendement/risque a été considéré depuis longtemps dans le domaine de la Finance. La théorie moderne du portefeuille de Harry Markowitz (1990) explique comment les investisseurs rationnels ne se bornent pas à maximiser le rendement espéré en achetant l'action la plus rentable, mais procèdent à la diversification du leur portefeuille pour optimiser le couple rendement/risque, en utilisant notamment le critère moyenne-variance. Les investisseurs ont en réalité de l'aversion envers le risque. Ils ne sont prêts à prendre plus de risques qu'en échange d'un rendement plus élevé, d'où une certaine équivalence entre la rentabilité marginale et le risque marginal. Les projets relativement plus risqués étant comparables aux yeux des investisseurs à des projets un peu moins rentables mais plus sûrs.

Il en apparaît que la perception unidimensionnelle, selon laquelle, la rentabilité serait le seul ou le principal objectif financier d'un projet, nécessite un ajustement. En réalité, la dualité rentabilité/risque devrait être prise dans son ensemble. Pour aider le manager à choisir entre les 3 projets présentés qui ne peuvent être départagés actuellement, il faudrait déceler celui qui dispose de la meilleure combinaison rentabilité/risque.

II. Objectif

L'objectif de cette recherche est de proposer une méthode qui permet de comparer les projets en tenant compte « simultanément » de leurs rentabilités et risques respectifs. L'idée consiste à trouver le moyen d'agréger la rentabilité et le risque en un seul indicateur, sur la base d'une certaine équivalence théorique entre la rentabilité marginale et le risque marginal. Nous proposons ainsi la conception de l'indicateur Valeur Sure de Projet ((PSV) pour Project Safe Value), qui consiste à internaliser le risque dans la mesure de la VAN par l'expression suivante [$PSV = VAN - \text{valeur du risque}$]. La logique de cette approche étant de « neutraliser » le biais du risque ; ou autrement dit, de « purifier » les VAN de leurs risques avant de les comparer sur une base égale.

Pour rendre possible la soustraction entre la rentabilité et le risque, il est nécessaire de convertir préalablement ce dernier en unité monétaire, c.à.d. d'attribuer une valeur (financière ou économique) au risque, que nous appellerons RiVa (Risk-Value). Nous appellerons l'indicateur de la valeur du risque « Risk-Value » (RiVa), la VAN purifiée du risque « Valeur Sure de projet » (Project Safe Value (PSV)), et le ratio RiVa/VAN Risk-Profitability Ratio (RPR).

III. Matériel Et Methodes

Puisque l'objectif est de neutraliser le risque de la VAN, qui est à la base une VAN « risquée », nous pouvons assimiler cette opération, comme dans la vie réelle, à la contraction d'une assurance spécifique à chaque projet, ou en incluant obligatoirement une assurance dans le calcul des projets considérés, avant de les comparer. L'assurance dont il est question est une couverture par une option financière. Certes, il n'existe pas de marché de Hedging pour les projets réels car ils sont caractérisés par leur singularité, mais nous emprunterons cette approche pour construire l'indicateur convoité.

Ainsi, du point de vue de la Finance, l'objectif recherché est d'estimer une valeur d'assurance (ou de couverture par option) pour les projets, comme c'est le cas avec la couverture des commodités par options financières. La valeur calculée de l'option, qui est tributaire des variables de risque du projet, représente le consentement à payer par le manager pour annuler le risque, et par conséquent, elle représente la valeur du risque lui-même. Plus le risque est élevé, et plus la valeur de l'option sera élevée. En résumé, nous allons simuler une option sur le projet qui permettra de le prémunir des situations d'échec. La valeur de cette option sera la valeur du risque que celle-ci permettra de couvrir.

Par ailleurs, il importe de souligner qu'il ne s'agit pas de la première fois que l'approche par les options, qui est originaire des marchés financiers, sera appliquée à des projets puisque cela a déjà fait l'objet d'une méthode intitulée « analyse par les options réelles », qui permet de convertir une opportunité (ou option réelle) en une valeur économique. En effet, l'opportunité de faire croître le projet, ou d'abandonner le projet en minimisant les pertes, etc. peut être exprimées par une valeur dite valeur d'option. De ce fait, nous avons déjà une analogie entre les variables financières des prix des commodités, et leurs correspondantes variables des projets, comme nous avons déjà un consensus scientifique qui accorde la transposition des méthodes des options financières vers celles des options réelles, sous l'hypothèse d'un processus brownien géométrique.

Cependant, entre les options réelles, et la valeur du risque que nous voulons calculer, il existe une différence de concept et de calcul : l'usage que nous convoitons vise à mesurer un risque, alors que celui des

options réelles vise, au contraire, à mesurer une opportunité apportée par la flexibilité conceptuelle du projet. En second lieu, les options réelles d'un projet se présentent à terme alors que le risque que nous voulons mesurer se situe en ex-ante. Nous allons donc emprunter une démarche de calcul similaire à celle des options réelles, mais avec une logique inverse : simuler une projection des valeurs du projet dans le futur moyennant le modèle Black-Scholes, la simulation du mouvement brownien ou une méthode semi-paramétrique similaire à celle de Datar-Mathews (2005), mais au lieu de capter les opportunités à terme, nous capterons les risques à l'instant t_0 .

Dans ce qui suit, nous allons cerner les correspondances possibles des variables du modèle d'option Put vers les variables de la valeur du risque (RiVa), avant de passer aux simulations puis de déterminer le modèle de la RiVa dans la partie résultats.

III.1. Le calcul paramétrique du risque

III.1.1. Approche du risque par l'option Put

L'option Put peut être assimilée à la fixation d'un niveau plancher. L'acquéreur de l'option Put profite des opportunités du marché normalement, tout en étant couvert contre les baisses à un certain niveau. Ainsi, la prime d'un Put représente, pour le vendeur, l'équivalent (ou le consentement) à payer pour annuler tous les risques de baisse des prix en-deçà d'un certain niveau.

Nous pouvons assimiler un projet à réaliser à un actif ou une action à vendre : dans les deux cas, le manager souhaiterait que la valeur du projet (ou de l'actif) augmente, mais que les risques de baisse soient couverts, notamment par une option put. La valeur d'un Put sur un projet sera donc considérée équivalente à la valeur du risque que cette option permettra de couvrir.

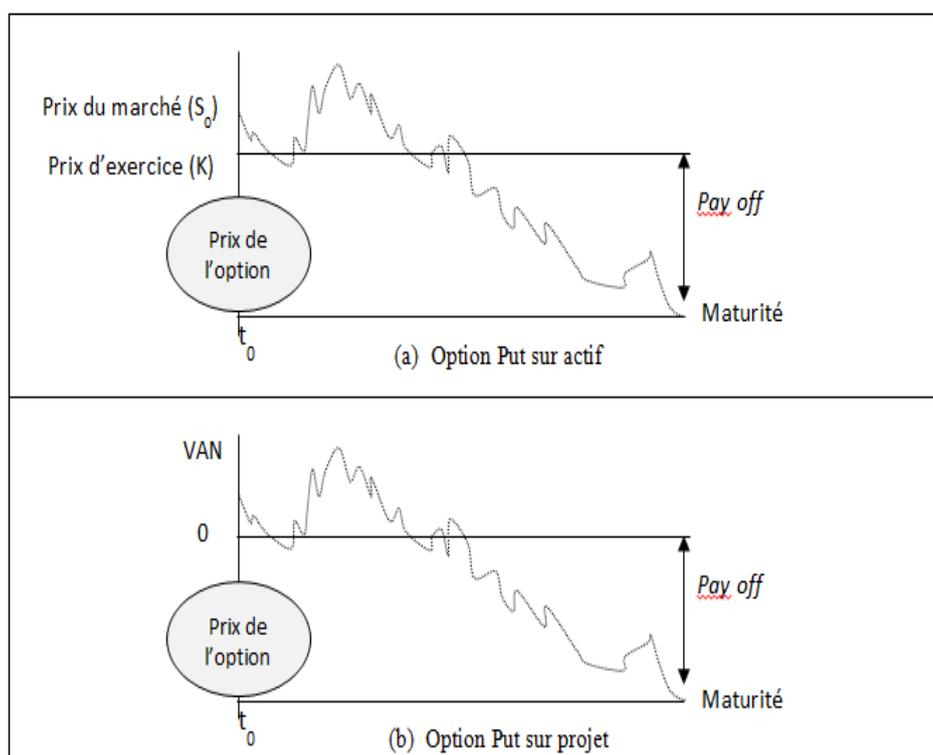


Figure 1 : Schématisation de la protection d'un projet par une option Put

La valeur de l'option Put va dépendre des variables du projet qui pilotent l'évolution de la VAN dans le temps. Plus ces variables ont tendance à précipiter la VAN en-dessous de zéro, plus la valeur de l'option sera chère et par équivalence, la valeur du risque sera jugée élevée. Comme pour l'analyse des options financières, nous définirons cinq variables pour calculer la valeur de l'option.

III.1.2. Simuler la valeur actualisée nette (VAN) ou la valeur actualisée (VA) ?

La couverture du projet contre le risque d'une valeur négative peut être formulée de deux manières possibles : **i**) soit nous protégeons la VAN pour qu'elle ne passe pas en dessous de zéro, (dans ce cas, la VAN correspond au prix du marché et zéro correspond au prix d'exercice) **ii**) soit nous protégeons la VA des cash flows pour qu'elle ne passe pas en dessous du coût d'investissement (dans ce cas, la VA correspond au prix du marché et le coût d'investissement correspond au prix d'exercice). La figure 2 illustre les deux possibilités qui ont le même principe, mais comme nous le verrons, ont des résultats différents.

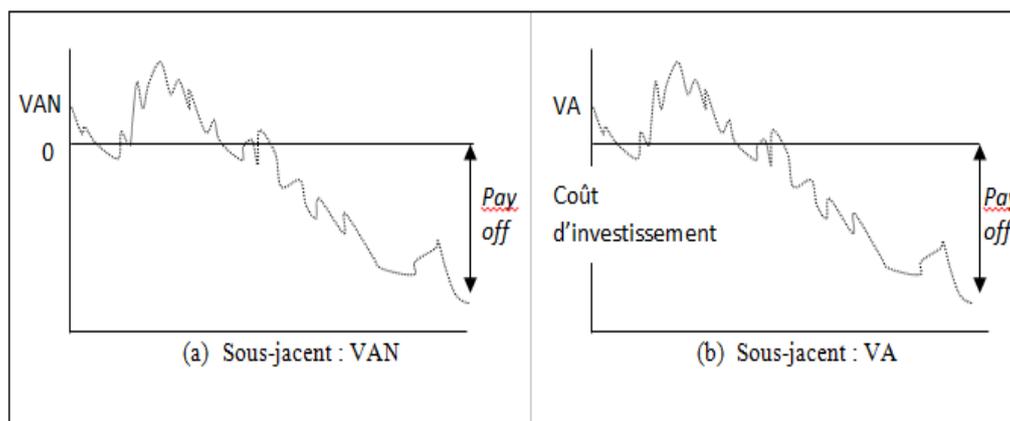


Figure 2 : Application d'une option Put sur la VAN et la VA d'un projet

Le premier scénario qui consiste à simuler des projections de la VAN et activer l'option lorsqu'elle passe en-dessous de zéro ne peut pas marcher dans les conditions d'un mouvement brownien géométrique. Rappelons que ce mouvement est conçu de sorte que la variable progresse dans le temps suivant une distribution log normale, et ne peut donc en aucun cas passer en-dessous de zéro. Cette caractéristique a été conçue au départ pour les prix. De ce fait, tests à l'appui, que le modèle soit tourné par la formule Black-Scholes, le modèle binomial ou la simulation de Monte Carlo, aucun des scénarii simulés de la VAN ne sera négatif, peu importe la volatilité. Par conséquent, l'option calculée dans ces conditions sera nulle.

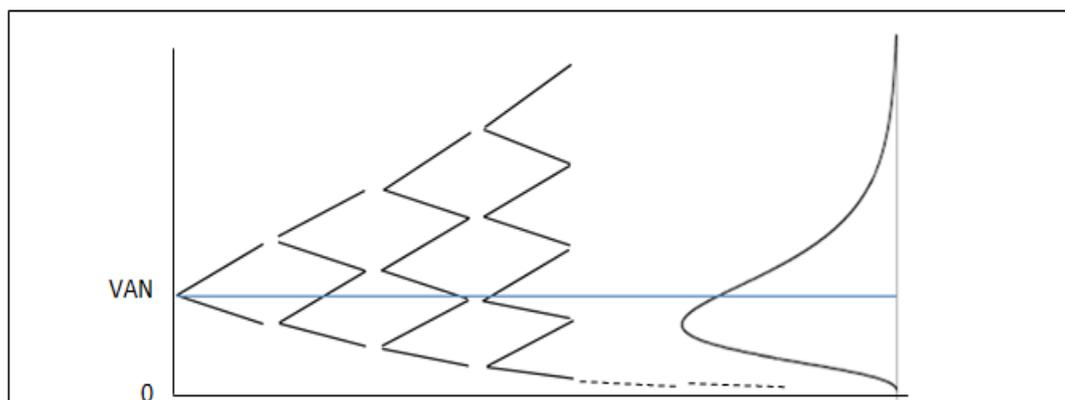


Figure 3 : Simulation temporelle de la VAN suivant le profil log normal

La figure 3 illustre une simulation temporelle de la VAN de manière discrète. On retrouve ici le schéma d'évolution du modèle binomial CRR. La construction de l'arbre binomial prouve à son tour la contrainte soulignée : même si la VAN est proche de zéro, et la volatilité importante, les facteurs de hausse (u) et de baisse (d) qui sont calculés par une formule exponentielle ne peuvent pas donner lieu à une bifurcation vers le bas avec une valeur négative, mais seulement une valeur qui tend à la limite vers zéro. Cette contrainte se manifeste également dans le calcul d'une option d'abandon, surtout lorsque le prix d'exercice est proche de zéro.

Par ailleurs, la VAN comprend un coût fixe important qui est le coût d'investissement, et qu'il serait préférable d'extraire pour ne simuler que ce qui est variable. La VA du projet semble être la méthode adéquate. Les scénarii simulés de la VA qui seront inférieurs au coût d'investissement feront l'objet d'un Pay off et donneront naissance à la valeur de l'option (valeur du risque « RiVa » dans notre cas).

III.1.3. Une option européenne ou américaine ?

La difficulté qui se dresse est de définir si le Put que nous simulerons sur le projet est de type européen ou américain. En analyse par les options réelles, on utilise l'une ou l'autre selon que le manager attend l'option (d'expansion, de contraction, d'abandon, ...) à une date précise, ou qu'il envisage de saisir toute opportunité qui se présentera durant la réalisation du projet. Les projets qui permettent de saisir les opportunités à n'importe quel moment ont plus de valeur et sont donc évalués par une option américaine. S'agissant de l'option Put que nous appliquerons sur un projet pour évaluer son risque, le type européen semble a priori plus approprié – et nous le testerons après avec l'option américaine-, pour les deux raisons suivantes :

- La démarche que nous adoptons est d'estimer une valeur d'assurance pour le projet. Cette valeur représente le consentement à payer par le manager pour annuler le risque, et par conséquent, elle représente la valeur du risque lui-même, qui est notre objectif. Evidemment, les assurances n'interviennent qu'a posteriori, lorsque la valeur du sous-jacent couvert est constatée en définitive. A titre d'exemple, l'assurance contre la sécheresse est exercée lorsque les dégâts sur la récolte sont constatés, ou lorsque les indicateurs de l'assurance (en l'occurrence les données climatiques) sont obtenus, mais jamais sur la base des spéculations faites en mi- année sur le résultat de fin de campagne. Nous retenons le même principe pour la VA ou la VAN d'un projet. L'assurance ne sera exercée qu'à la fin de la durée économique du projet, après avoir constaté sa valeur définitive (VA ex-post ou VAN ex-post) ; mais non pendant le déroulement du projet en se basant sur une valeur mi-parcours provisoire. De cette perspective, nous pouvons assimiler la couverture du projet à un Put européen avec une maturité qui s'étend sur la durée de vie économique du projet. La considération de cette maturité (10, 15, 20, 30 ans) renvoie à couvrir l'ensemble des cash-flows qui constituent la valeur de ce projet. Avec ce raisonnement, l'idée d'une option américaine est écartée de fait car elle aurait renvoyé à une assurance qui peut s'exercer pendant le déroulement du projet et donc, sur la base d'une spéculation au lieu d'une réalisation.
- Le choix d'une option européenne est favorisé également par le fait que son homologue américaine comprend des avantages additionnels qui ne sont pas requises dans notre mesure du risque. Ce qui fait la cherté d'un Put américain par rapport à un Put européen, c'est d'une part : **i)** la possibilité d'exercer l'option à tout moment et donc de pouvoir vendre l'actif avant sa maturité pour le cas des options financières, (ou d'abandonner le projet avant son terme pour le cas des options réelles), ce qui offre réellement la possibilité de liquider l'actif ou le projet et de vaquer ainsi à d'autres investissements. D'autre part, **ii)** l'exercice prématuré d'une option Put par rapport à la maturité permet de libérer le capital de manière précoce et donc d'épargner le coût du capital sur la période restante à la maturité.

Le Put américain reflète une couverture sophistiquée qui, d'une certaine manière, dépasse quelque peu les prérogatives d'une couverture basique des risques et peut s'étendre à la spéculation. En offrant la possibilité d'exercer à tout moment, l'option américaine s'étend à offrir à son titulaire l'opportunité de spéculer dans le temps pour rentabiliser au mieux le coût de la couverture. Par ailleurs, si les opportunités offertes par le Put américain sont bien réelles dans la finance corporative et dans le management des projets, parce qu'elles offrent au manager la possibilité de changer de cap à tout moment (vendre l'actif à tout moment, ou abandonner le projet à tout moment), elles n'ont toutefois pas de sens dans la simulation d'une assurance, qui n'influence aucunement la conduite du projet, et qui ne permet pas de libérer réellement celui-ci avant son terme.

L'utilisation d'une option américaine pour estimer le risque paraît surestimée à première vue, à moins qu'on ne veuille simuler une assurance avancée qui joue le rôle d'une option d'abandon, et qui peut être exercée à n'importe quel moment dès que les indicateurs de suivi du projet sont défavorables. Mais avons-nous besoin de simuler une telle assurance pour estimer le risque ? Nous traiterons dans le chapitre suivant la mesure du risque aussi bien en option européenne qu'américaine. L'objectif de cette confrontation sera **i)** d'affirmer tout d'abord si la différence entre les deux types d'options est significative, **ii)** confirmer que les deux mesures sont des fonctions homogènes (même classement des projets suivant le risque) et qu'elles ne diffèrent que par le rythme d'accroissement de la valeur du risque à travers le temps, **iii)** appuyer ou remettre en question le choix d'une option européenne en se basant sur le spectre des résultats de simulation. La démarche que nous allons emprunter dans l'étude de cas sera détaillée par la suite.

III.1.4. Choix de la maturité et impact du taux d'intérêt sans risque

Etant donné que la valeur du projet est dispatchée sur plusieurs années, nous allons considérer une maturité qui s'étend sur toute sa durée de vie économique, afin que tous les cash-flows de la VAN soient inclus. Ce postulat n'étant pas nouveau puisque l'analyse par les options réelles repose sur le même raisonnement, avec une adaptation selon les cas d'options réelles rencontrées.

Pour sa part, le taux d'intérêt sans risque (r) a un impact très significatif sur la valeur de l'option, en particulier lorsque la maturité est aussi importante. Nous discuterons dans le chapitre suivant et procéderons à un ensemble de tests afin de déterminer la valeur qu'il faudra donner à (r) en simulant l'effet de plusieurs niveaux de (r) sur le résultat.

III.1.5. Champ des valeurs de la RiVa

Comment imaginer les valeurs de l'indicateur RiVa ? La RiVa que nous allons mesurer (qui est une application particulière de l'option Put) devrait avoir une grandeur numérique qui soit cohérente avec la valeur et les caractéristiques du projet. Le champ des valeurs possibles du risque devrait, en principe, être compris entre zéro et le coût d'investissement, similairement à la valeur d'un Put financier qui doit être comprise entre zéro et le prix d'exercice. Le risque sera égal à zéro s'il n'y a aucune chance que le projet soit négatif. Dans l'autre extrémité, il sera égal au coût d'investissement, qui est la perte maximale, si le projet est négatif à 100%.

Evidemment, une assurance sur un projet perdant à 100% vaudra le coût d'investissement de celui-ci. Ce raisonnement est valable aussi pour la RiVa calculée en approche semi-paramétrique.

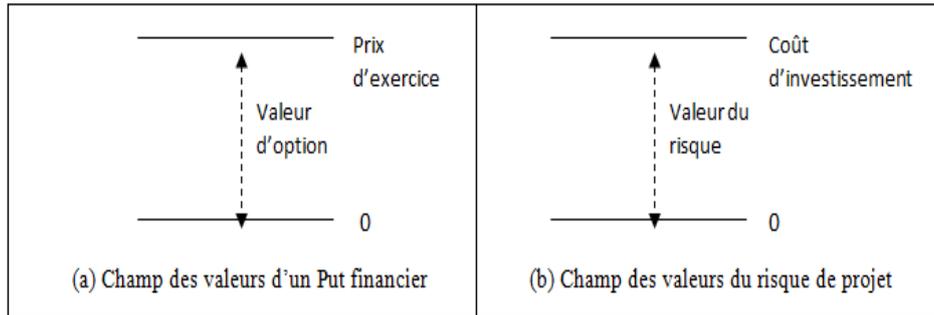


Figure 4 : Champ des valeurs de l'indicateur du risque

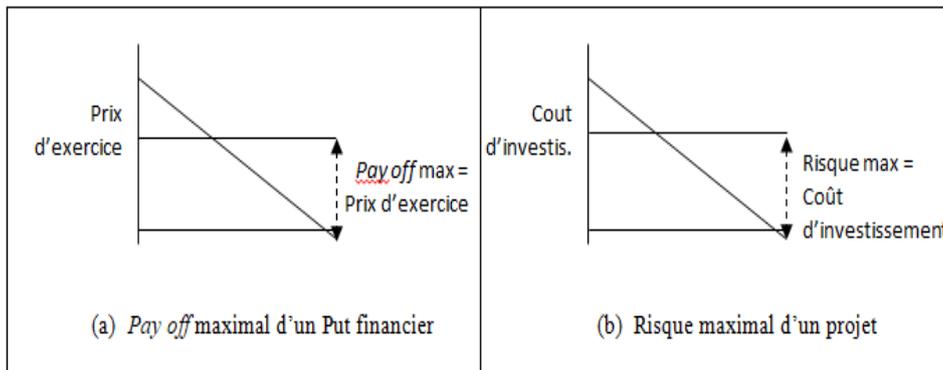


Figure 5 : Risque maximal d'un projet

III.2. Le calcul semi-paramétrique du risque

La méthode semi-paramétrique imaginée est similaire à celle de Datar-Mathews, mais en version Put. Elle consiste à simuler la VAN du projet par la méthode de Monte Carlo, et de capter le Pay off de l'option Put à chaque fois que la VAN sera négative. L'espérance des Pay off générés est la valeur de l'option, et par équivalence, la valeur du risque. Ce calcul peut être effectué de deux manières : La première est de calculer l'espérance des VAN négatives et de la multiplier par la probabilité d'échec (figure 6).

$$\text{RiVa} = \text{Probabilité d'échec} \times \text{valeur actualisée nette}$$

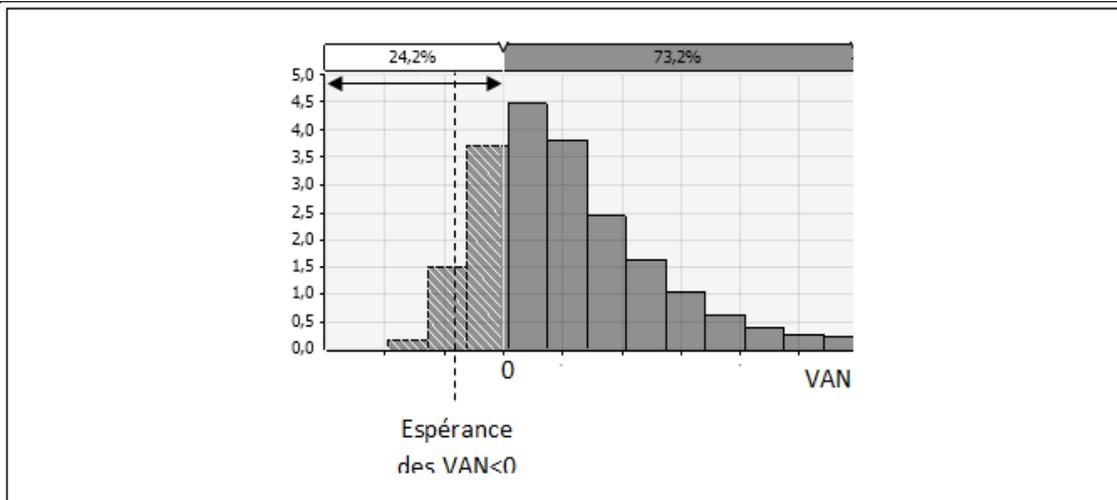


Figure 6 : Première méthode du calcul semi-paramétrique du risque

La deuxième est de conditionner la simulation de Monte Carlo par la formule suivante afin d'attribuer un Pay off aux VAN négatives, et zéro aux VAN positives. L'espérance de la distribution obtenue est la valeur du risque (figure 7). Valeur d'option = Espérance [$\max(\overline{VAN}; 0)$]

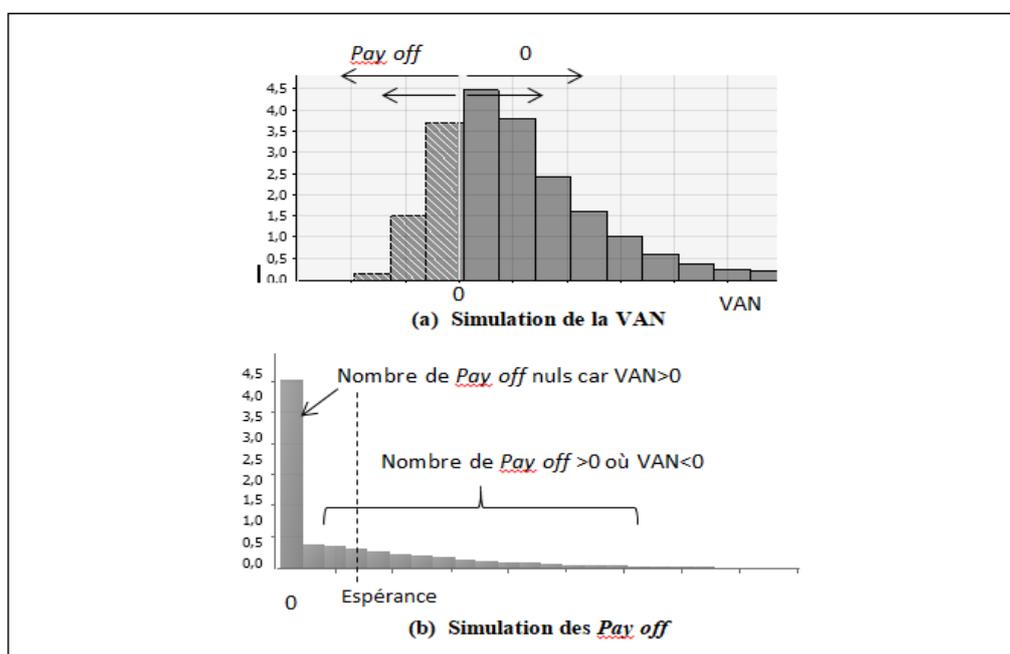


Figure 7 : Deuxième méthode du calcul semi-paramétrique du risque

Comme pour la méthode Datar-Mathews, on considère cette approche comme « semi »-paramétrique car d'une part, elle n'utilise pas le mouvement brownien géométrique ni aucun autre processus paramétrique pour projeter la valeur du projet dans le futur, mais d'autre part, elle construit la simulation de Monte Carlo sur la base des distributions de probabilités des inputs du projet, qui elles, sont paramétriques. Cette approche a l'avantage de pouvoir épouser toutes les distributions réelles du projet, sans forcément passer par l'hypothèse de log normalité qui est exigée par la formule Black-Scholes. Par ailleurs, si la VAN du projet semble suivre une distribution log normale, les résultats obtenus sont similaires à ceux de la formule Black-Scholes. Dans le chapitre suivant, nous détaillerons l'utilisation de la méthode Datar-Mathews appliquée à l'évaluation du risque, en mettant en exergue les similitudes et les différences avec son application dans l'analyse par les options réelles.

IV. Resultats

Parmi les possibilités que nous avons discutées dans la partie précédente, nous commencerons par présenter directement le produit méthodologique adéquat qui définit la RiVa, aussi bien en approches paramétrique que semi-paramétrique, puis nous allons le tester et le discuter. En second lieu, nous reviendrons sur le pourquoi du choix de ce produit très exactement en présentant les résultats que donnent les autres versions qui ont été examinées et en démontrant les raisons aussi bien théoriques qu'empiriques qui nous ont permis de les écarter. Il s'agit ici des versions de calcul en option américaine, et de la considération du taux d'intérêt sans risque dans les deux types d'options européennes et américaines.

IV.1. La méthode paramétrique

IV.1.1. Présentation de la méthode paramétrique

La valeur du risque sera calculée par une option Put européenne en position long et sans dividendes, que ce soit en utilisant la formule Black-Scholes (1973), la simulation du mouvement brownien géométrique ou le modèle binomial. Les résultats de ces 3 méthodes étant pratiquement les mêmes. Nous utiliserons la valeur actualisée (VA) en lieu du prix de marché (S_0), le coût d'investissement (CI) (actualisé s'il s'étend sur plus d'un an) en lieu du prix d'exercice (K), la durée de vie économique du projet en lieu de la maturité (t) ; nous annulerons le taux d'intérêt sans risque (r) (ce qui est le changement majeur par rapport au calcul des options réelles) et nous utiliserons la volatilité annualisée du projet en lieu de la volatilité annualisée d'un actif financier (σ).

Le tableau 2 montre la correspondance entre les variables financières et les variables du projet. Pour initier l'examen de ce modèle, puisque les simulations doivent porter sur des nombres, nous attribuerons aux

variables du modèle les valeurs d'un projet réaliste. Nous prenons l'exemple d'un projet relatif à la mise en place d'une exploitation d'arganiculture. L'objectif étant seulement d'offrir une base numérique -que nous allons simuler - pour pouvoir examiner la méthode. Pour simplifier la lecture et la perception des valeurs, nous avons arrondi la VA à 3 500 000 DH et le CI à 1 800 000 DH. La valeur du risque (RiVa) obtenue sur la base des données du tableau 2 s'élève à 174 066 DH. Elle représente l'espérance des pertes du projet c.à.d. la moyenne des pertes occasionnées si le projet venait à exister fictivement plusieurs milliers de fois.

Tableau 2 : Correspondance des variables dans le modèle d'évaluation des options

| Variables financières | Variables du projet | Valeurs du projet |
|----------------------------------|--------------------------------|-------------------|
| Inputs du modèle | | |
| Prix du marché (S ₀) | Valeur actualisée (VA) | 3 500 000 DH |
| Prix d'exercice (K) | Coût d'investissement (CI) | 1 800 000 DH |
| Maturité (t) | Durée de vie économique (t) | 25 Ans |
| Taux d'intérêt sans risque (r) | Taux d'intérêt sans risque (r) | annulé |
| Volatilité annualisée (σ) | Volatilité annualisée (σ) | 14,63% |
| Output du modèle | | |
| Valeur de l'option financière | Valeur du risque | 174 066 DH |

La figure 8 est une capture d'écran du calcul de la valeur du risque sur Microsoft Excel. Il en apparait que la valeur donnée par la formule Black-Scholes pour l'option européenne est similaire à celles données par les approximations de Barone-AdesiWhaley(1987) et Bjerksund-Stensland 2002 (2006) pour l'option américaine. Cette condition est toujours vérifiée lorsque le taux d'intérêt sans risque (r) est annulé. Pour la formule de Barone-AdesiWhaley qui n'a pas r=0 dans son domaine de définition, nous avons utilisé un taux d'intérêt négligeable de E^{-10%}.

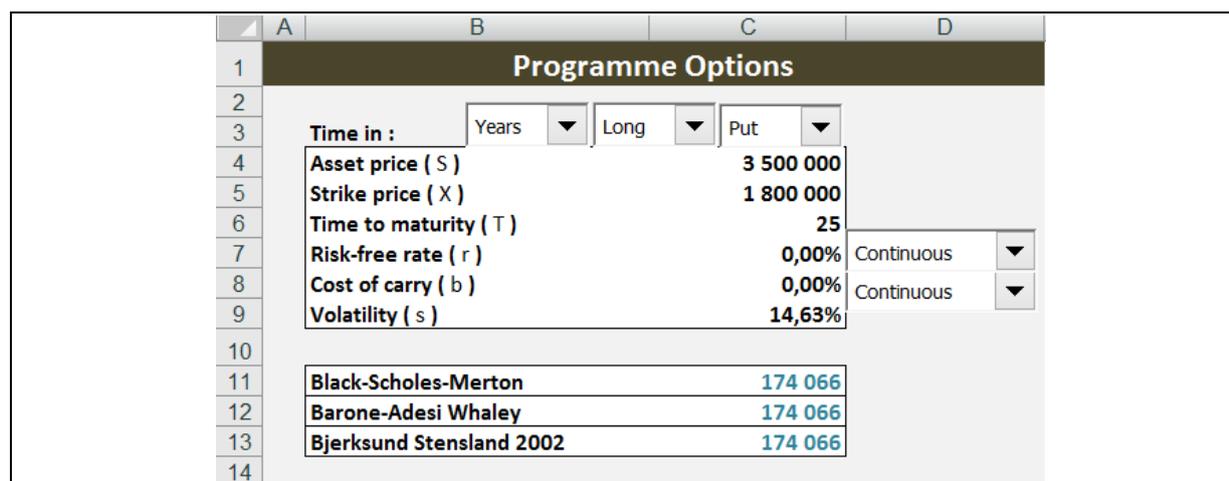


Figure 8 : Capture d'écran du calculateur de la valeur du risque sur Excel

• **Les formules RiVa, PSV et RPR**

La Risk-Value (RiVa) en approche paramétrique est calculée par une option européenne ou américaine à travers un processus brownien géométrique, en neutralisant le taux sans-risque (r=0). La formule de la RiVa se présente comme suit :

$$RiVa = CI \phi(-d_2) - VA\phi(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln \left(\frac{VA}{CI} \right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} \right) t \right]; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

VA : valeur actualisée du projet

CI : coût d'investissement du projet

σ : volatilité annualisée du projet

t : durée de vie économique du projet

La valeur sûre du projet (PSV) est la valeur actualisée nette du projet (VAN) de laquelle est soustraite la valeur du risque (RiVa).

$$PSV = VAN - RiVa$$

Le ratio risque-rentabilité (RPR) est le rapport entre la RiVa et la VAN. Il permet de calculer ce que représente le risque par rapport à la VAN en pourcentage ou en indice.

$$\text{RPR} = \text{RiVa}/\text{VAN}$$

IV.1.2. Tests de vérification de la méthode paramétrique

Le fait de proposer une méthode appelle systématiquement à explorer l'ensemble de ses outputs possibles. La valeur du risque que nous allons mesurer devrait avoir une grandeur numérique qui soit cohérente avec la rentabilité du projet. Le champ des valeurs possibles du risque devrait, en principe, être compris entre zéro et le coût d'investissement, similairement à la valeur d'un Put financier qui doit être comprise entre zéro et le prix d'exercice. Le risque sera égal à zéro s'il n'y a aucune perte possible, ou alors proche de zéro si les pertes éventuelles sont très légères ou très peu probables. Dans l'autre extrémité, il sera égal au coût d'investissement, qui est la perte maximale, si le projet n'a aucune chance d'être rentable et qu'il ne génère aucun bénéfice net pouvant au moins réduire le coût de l'investissement. Evidemment, une assurance sur un projet perdant à 100% ne peut être égale qu'au coût d'investissement de celui-ci, sans tenir compte des commissions commerciales. Dans ce qui suit, nous allons examiner l'évolution de la valeur du risque suivant chacune des variables du modèle. Elle devrait être comprise dans l'intervalle susmentionné et son évolution devrait être monotone et conforme à une allure fonctionnelle logique. On devrait observer que pour un projet jugé rentable (c.à.d. $VA > CI$) : l'augmentation de la VA devrait induire une baisse de la valeur du risque ; l'augmentation de la maturité (durée de vie économique du projet) devrait induire une hausse de la valeur du risque (tant que nous avons annulé le taux d'intérêt sans risque, cette condition devrait être vérifiée) ; et l'augmentation de la volatilité devrait induire également une hausse du risque. Dans l'autre cas où le projet n'est initialement pas rentable (c.à.d. $VA < CI$), la volatilité aura un effet inverse. Or l'évaluation de la valeur du risque pour les projets initialement non viables s'avère inutile.

a) Simulation de la Valeur Actualisée

Nous avons testé un large champ de valeurs de la VA pour vérifier que la valeur du risque est toujours comprise entre zéro et le coût d'investissement, et qu'elle évolue de manière monotone et suivant une allure bien précise. Il s'est confirmé que pour toutes les valeurs simulées, allant de 0 à 200% de la VA de base, la valeur du risque est restée comprise entre zéro et le coût d'investissement (figure 9, tableau 3). Plus loin, quelle que soit la VA saisie dans le modèle, la valeur du risque obtenue vérifie cette propriété qui est caractéristique au modèle Put. La valeur du risque est pratiquement égale au coût d'investissement lorsque la VA est nulle, car à ce niveau, la perte espérée est égale au coût d'investissement. Au fur que la VA augmente, le risque de non-viabilité du projet diminue logiquement. Il tend vers zéro lorsque la VA du projet est suffisamment élevée. Cette simulation est effectuée CeterisParibus, en maintenant inchangés les 4 autres paramètres du modèle. Si ces paramètres venaient à être modifiés, la courbe des valeurs du risque changerait de courbure, tout en gardant ses extrémités et son allure logarithmique.

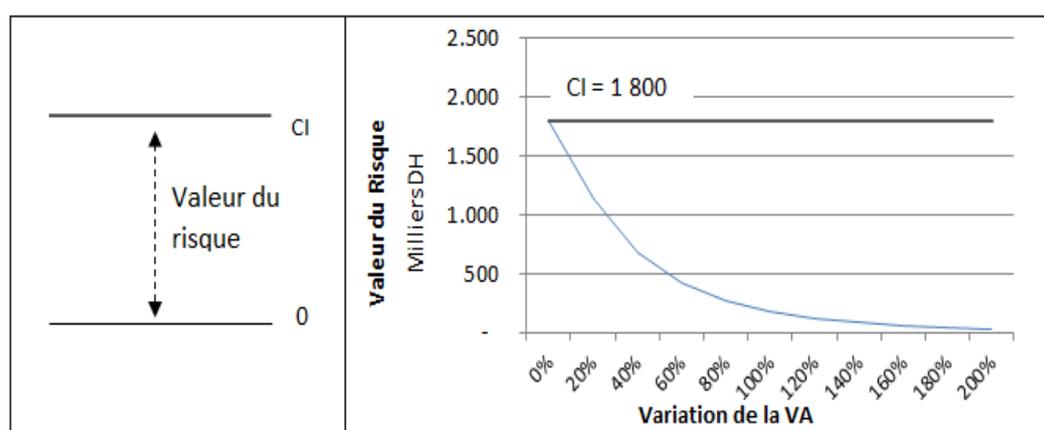


Figure 9 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la variation de la VA

Tableau 3 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la variation de la VA

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|------|------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| Variation de la Valeur Actualisée | 0% | 20% | 40% | 60% | 80% | 100% | 120% | 140% | 160% | 180% | 200% |
| Valeur du Risque (Milliers DH) | 1800 | 1136 | 682 | 418 | 265 | 174 | 117 | 81 | 58 | 42 | 30 |

b) Simulation de la Maturité

Nous avons testé un large champ de valeurs de la maturité (t) - qui est dans notre cas la durée de vie économique du projet - pour vérifier que la valeur du risque est toujours comprise entre zéro et le coût d'investissement, et qu'elle évolue de manière monotone et suivant une allure bien précise. Il s'est confirmé que pour toutes les maturités simulées, allant de 1 jusqu'à 30 ans, la valeur du risque est restée comprise entre zéro et le coût d'investissement. Il apparaît même que l'influence individuelle de la maturité n'est pas très importante (figure 10, tableau 4) tant que la volatilité annuelle est modérée, et que le taux d'intérêt sans risque est considéré nul. Nous reviendrons par la suite sur la raison pour laquelle le taux d'intérêt sans risque a été annulé dans le modèle.

En réalité, le temps n'est qu'un vecteur d'accroissement de la volatilité annuelle et du taux d'intérêt sans risque. Si nous considérons une volatilité nulle, et aussi un taux d'intérêt sans risque nul, l'effet du temps sur la valeur du risque sera également nul. A l'inverse, plus la volatilité est élevée, plus l'effet du temps sur la valeur du risque est important, et donc plus la pente de la courbe sera importante.

Au niveau du point t=0, Il apparaît que la valeur du risque est nulle. Cela s'explique par le fait qu'à t=0, c.à.d. à horizon temporel nul (situation du présent), le risque est inexistant.

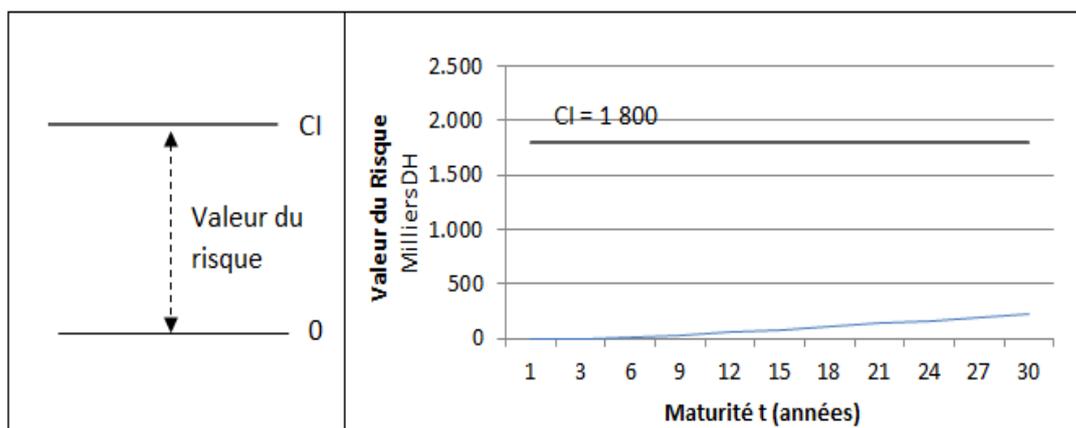


Figure 10 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la maturité

Tableau 4 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la maturité

| | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|---|------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Maturité (années) t | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| Valeur du Risque (Milliers DH) | 0 | 0,86 | 11 | 31 | 55 | 82 | 110 | 137 | 165 | 192 | 219 |

c) Simulation de la Volatilité

Nous avons testé un large champ de valeurs de la volatilité pour vérifier que la valeur du risque est toujours comprise entre zéro et le coût d'investissement, et qu'elle évolue de manière monotone et suivant une allure bien précise. Il s'est confirmé que pour toutes les valeurs simulées, allant d'une volatilité de 0 jusqu'à 100%, la valeur du risque est restée comprise entre zéro et le coût d'investissement (figure 11, tableau 5). Par ailleurs, quelle que soit la volatilité saisie dans le modèle, la valeur du risque restera toujours comprise dans cet intervalle.

Dans le cas d'un projet initialement viable – c.à.d. $VA > CI$ –, une volatilité nulle implique que le risque est inexistant et par conséquent, la valeur du risque est nulle. Dans le cas contraire, si nous avons un projet non-viable dès le départ – c.à.d. $VA < CI$ –, et une volatilité nulle, la valeur du risque serait le montant du déficit.

Dans la figure 11, il apparaît qu'au fur que la volatilité augmente, la valeur du risque augmente à son tour, car le champ des pertes possibles ainsi que leurs probabilités augmente. Comme attendu, la valeur du

risque plafonne au niveau du coût d'investissement. Cette simulation est effectuée CeterisParibus, en maintenant inchangés les 4 autres paramètres du modèle. Si ces paramètres venaient à être modifiés, la courbe des valeurs du risque changerait légèrement de courbure, tout en gardant ses extrémités et son allure logarithmique.

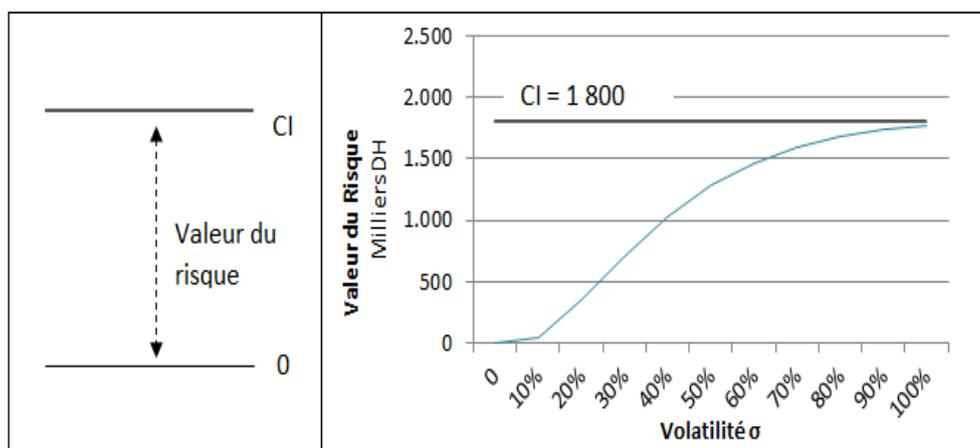


Figure 11 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la volatilité

Tableau 5 : Evolution de la valeur du risque en fonction de la volatilité

| Volatilité σ (%) | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
|--------------------------------|----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| Valeur du Risque (Milliers DH) | 0 | 52 | 355 | 710 | 1026 | 1281 | 1470 | 1601 | 1687 | 1739 | 1769 |

IV.2. La méthode semi-paramétrique

La version semi-paramétrique que nous proposons reproduit la valeur du risque suivant la même logique de la méthode paramétrique, mais à la différence qu'elle emprunte un sentier empirique plutôt qu'un modèle. Son mécanisme consiste à simuler la VA du projet par le procédé de Monte Carlo, et de capter le déficit du projet (CI-VA) à chaque fois qu'il se manifeste. L'espérance des déficits simulés est la valeur du risque (figure 12).

$$\text{Valeur d'option} = \text{Espérance} [\max(\overline{CI - VA}; 0)]$$

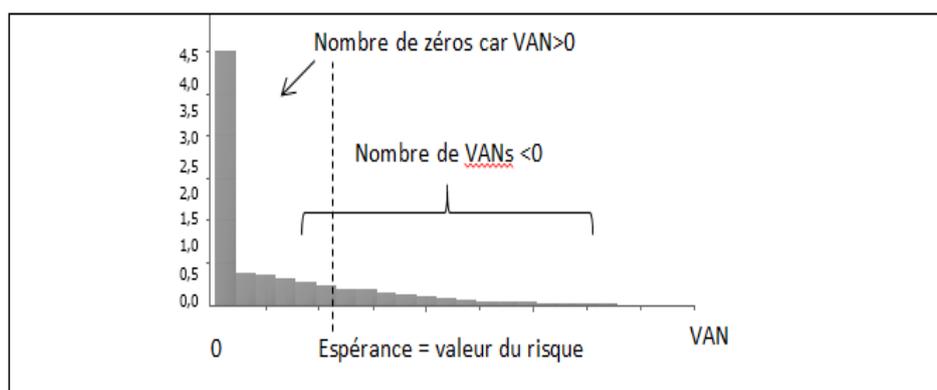


Figure 12 : Méthode semi-paramétrique pour le calcul de la valeur du risque

A la différence de la méthode paramétrique qui force l'évolution de l'incertitude dans le temps suivant une distribution log-normale conformément à l'hypothèse de base, la méthode semi-paramétrique s'adapte à la forme distributionnelle réellement obtenue par la simulation de Monte Carlo du projet.

Dans le cas particulier (qui est très courant) où la distribution de probabilités du projet affiche un profil log-normal (c.à.d. qu'elle reproduit l'hypothèse de base du modèle Black-Scholes), les résultats de la méthode semi-paramétrique devraient, en principe, être similaires à celle de la méthode paramétrique. Effectivement, lorsque nous avons simulé une distribution de probabilités logarithmique pour la VA du projet (il s'agit ici du même projet que nous avons présenté dans la méthode paramétrique), nous avons obtenu une mesure très proche

de celle de la méthode paramétrique, à savoir une valeur du risque de 173 960 DH pour la méthode semi-paramétrique et 174 066 DH pour la méthode paramétrique. Ainsi, à partir d'une VAN risquée de 1 700 000 DH (3 500 000 – 1 800 000), la valeur de la PSV est de 1 525 934 DH avec la méthode paramétrique et 1 526 040 DH avec la méthode semi-paramétrique (tableau 6).

Tableau 6 : Comparaison des résultats des méthodes paramétrique et semi-paramétrique

| | Méthode paramétrique | Méthode semi-paramétrique |
|------------------------------------|----------------------|---------------------------|
| VA | 3 500 000 | 3 500 000 |
| CI | 1 800 000 | 1 800 000 |
| VAN (risquée) | 1 700 000 | 1 700 000 |
| Valeur du risque (RiVa) | 174 066 | 173 960 |
| Valeur sure du projet (PSV) | 1 525 934 | 1 526 040 |

Pour obtenir ce résultat, nous avons simulé les valeurs de la VA à l'amont suivant une distribution log normale, avec une valeur moyenne de 3 500 000 DH et un écart-type de 84,09%, puis nous avons capté à l'aval les déficits enregistrés en enregistrant (CI-VA) pour les VAN négatives, et zéro pour les VAN positives. L'espérance de la distribution obtenue, qui est la valeur du risque, s'est élevée à 173 960 DH. L'utilisation d'un écart-type de 84,09% correspond à la volatilité annuelle de 14,65% que nous avons utilisée dans la méthode paramétrique. L'équivalence volatilité=<=>écart-type provient de l'approximation suivante :

Volatilité annuelle : σ annuelle = 14,65%

Volatilité totale : σ totale = 14,65% $\times \sqrt{25} = 73,25\%$

Formule : σ totale = $\sqrt{\ln(1 + ETrelatif^2)}$

Ecart-type relatif : ET relatif = 84,09%

Le décalage léger de résultats observé entre les 2 méthodes (173 960 et 174 066 DH), qui n'est pas significatif à l'échelle de la VAN (0,006% de la VAN), provient du fait que les simulations numériques reposent sur un échantillonnage de nombres pseudo-aléatoires et ne sont donc jamais exhaustives. Les valeurs obtenues diffèrent légèrement d'une simulation à l'autre et se situent généralement dans les environs de la valeur calculée par le modèle Black-Scholes. Il provient également de l'approximation mathématique utilisée pour passer de la volatilité à l'écart-type.

Les figures suivantes 13 et 14 montrent le calcul de la valeur du risque qui a été effectué avec 10 000 itérations en 100 simulations successives à l'aide du logiciel @risk. La figure 13 montre, d'une part, comment le logiciel a procédé à l'échantillonnage des VA au sein de la distribution log-normale théorique que nous lui avons défini au préalable, puis, d'autre part, la différence statistique entre la distribution log-normale échantillonnée par le logiciel et la distribution log-normale théorique qui est considérée par le modèle Black-Scholes. Quant à la figure 14, elle affiche l'output de la simulation où l'on peut voir qu'il y a 29,3% de chances que la VA passe en dessous du CI et donc d'obtenir une VAN négative, ainsi que la statistique (moyenne=173 960) qui est l'espérance des déficits du projet, et par équivalence, la valeur du risque.

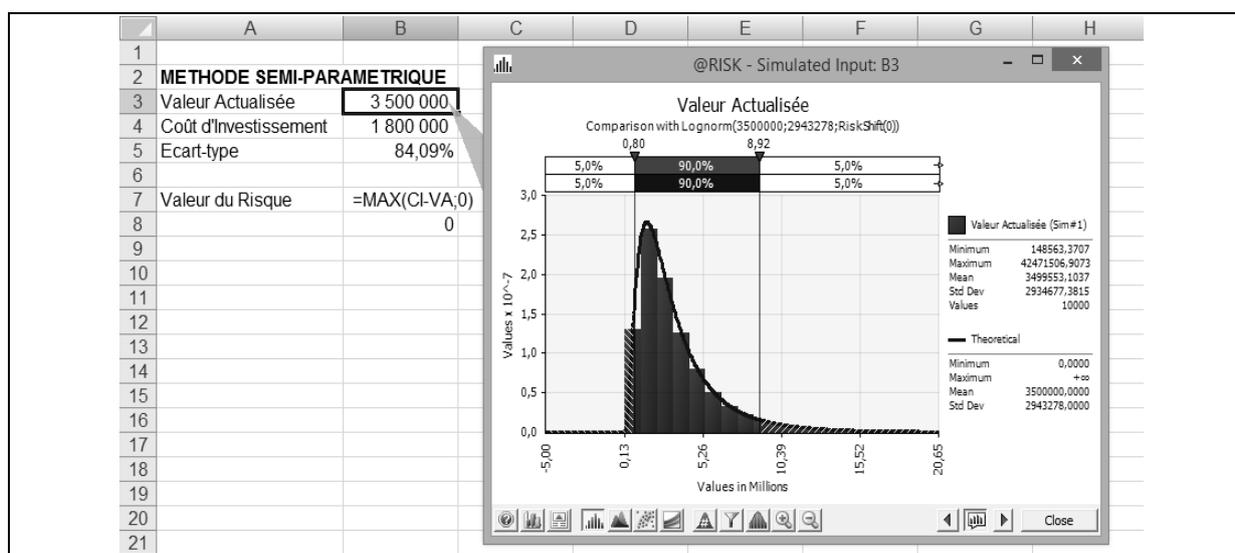


Figure 13 : Echantillonnage d'une distribution log-normale par le logiciel @risk

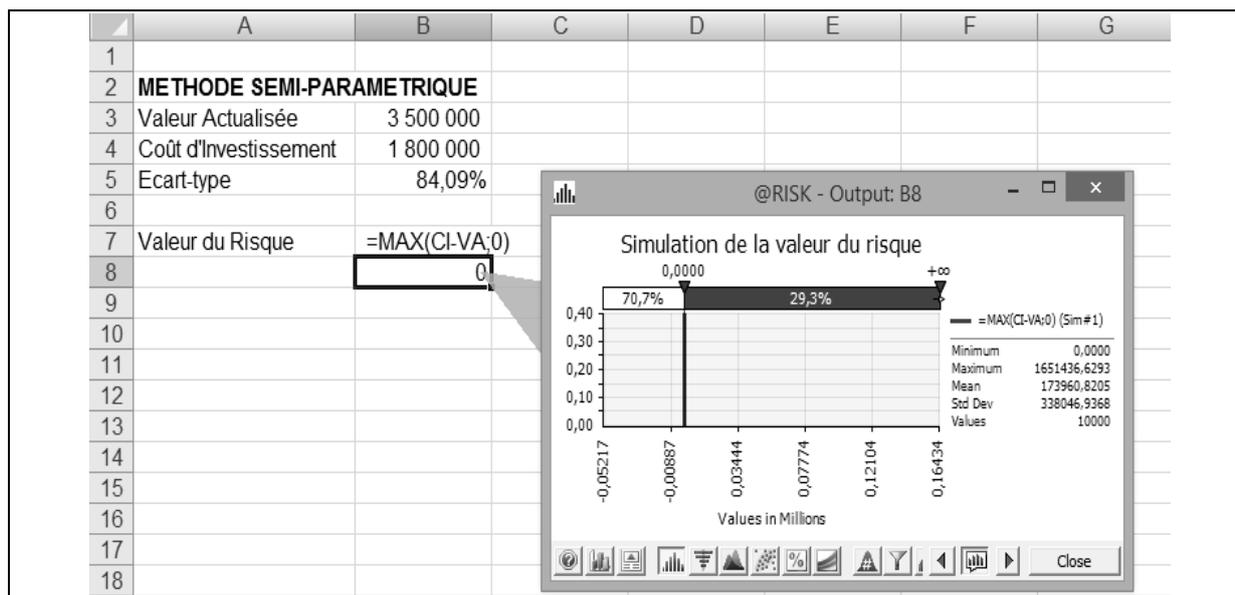


Figure 14 : Obtention de la RiVa par la simulation de Monte Carlo (avec @Risk)

QUELLE DIFFERENCE AVEC LA METHODE DATAR-MATHEWS ? Quoique la méthode semi-paramétrique que nous proposons se soit inspirée de la méthode Datar-Mathews, elle présente tout de même une double différence avec celle-ci. En premier lieu, il y'a une différence d'objectif et de concept : la méthode Datar-Mathews a été conçue pour évaluer les options réelles (opportunités d'expansion en type européen, voire d'abandon si le cas s'y prête), tandis que la méthode que nous proposons vise à quantifier non pas les opportunités du projet mais son risque, sans liaison avec le fondement théorique des options. En deuxième lieu, il y'a une différence de calcul, du fait que nous n'actualisons pas le coût d'investissement. Dans cette partie, nous présentons directement la méthode retenue en démontrant son calcul, sa grandeur, son évolution, sa délimitation et la concordance des méthodes paramétriques et semi-paramétriques. Nous expliquerons les raisons pour lesquelles nous n'actualisons pas le coût d'investissement dans la partie suivante, lorsque nous discuterons l'annulation du taux d'intérêt sans risque dans la méthode paramétrique.

IV.3. Comparaison des résultats des méthodes paramétriques et semi-paramétriques

Pour montrer que la méthode semi-paramétrique produit quasiment le même résultat que celle paramétrique dans le cas où la VA du projet est log-normalement distribuée, nous avons calculé avec la méthode semi-paramétrique quelques-uns des scénarios que nous avons affiché dans les tableaux précédents. Il s'agit en l'occurrence des scénarios où l'on a fait varier la VA de 40% puis de 160%, la maturité à 6 ans puis 18 ans, et la volatilité annuelle à 20% puis 70%. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 7.

Tableau 7 : Comparaison de quelques résultats de l'analyse de sensibilité entre la méthode paramétrique et la méthode semi-paramétrique.

| | Méthode paramétrique | Méthode paramétrique semi- | Ecart en % de la VAN |
|--|----------------------|----------------------------|----------------------|
| Variation VA | | | |
| Variation de 40% | 682 074 | 681 977 | 0,005% |
| Variation de 160% | 57 572 | 57 549 | 0,005% |
| Variation de la Maturité | | | |
| Maturité de 6 ans | 11 013 | 11 014 | 0,000% |
| Maturité de 18 ans | 109 629 | 109 603 | 0,001% |
| Variation de la Volatilité annuelle | | | |
| Volatilité à 20% | 355 016 | 354 587 | 0,024% |
| Volatilité à 70% | 1 601 452 | 1 601 375 | 0,004% |

Les résultats des 2 approches (paramétrique et semi-paramétrique) sont pratiquement similaires dans le cas d'une log-normalité parfaite, c.à.d. une log-normalité définie par le logiciel. A ce niveau, la légère différence existante ne provient que de l'échantillonnage numérique. Cela suppose que lorsque l'analyste se rend compte que la distribution de la VA du projet a une forme log-normale apparente, le logiciel procédera à un test de correspondance puis un ajustement automatique de la distribution vers la loi log-normale (ou une autre loi en l'occurrence, la plus proche). Cependant, si l'analyste observe une forme log-normale apparente ou une forme

qui lui est proche et décide d'utiliser la distribution obtenue telle qu'elle est sans l'ajuster, le résultat sera légèrement décalé de la méthode paramétrique.

IV.4. Résultats de simulation des autres versions étudiées de la RiVa

Pour arrêter la méthode définitive présentée dans la section précédente, nous avons au préalable analysé et comparé 4 versions (tableau 8). Il s'agit des versions européenne et américaine avec et sans considération du taux d'intérêt sans risque. Le premier scénario qui regroupe les versions 1 et 2 consiste à déconsidérer le taux d'intérêt sans risque, ce qui représente un changement de taille par rapport au modèle de base d'évaluation des options. Comme nous le verrons, ce scénario aboutit au fait que les mesures européennes et américaines donnent les mêmes résultats. Les versions 1 et 2 constituent ainsi la méthode que nous avons arrêtée. Quant au scénario 2 qui regroupe les versions 3 et 4, il consiste à considérer un taux d'intérêt sans risque positif conformément au modèle de base d'évaluation des options. Chacune des deux versions de ce scénario a été examinée à 4 niveaux de (r) : 2%, 3,5%, 5% et 7%, avec l'objectif d'illustrer la dépréciation de la valeur du risque suivant chaque niveau de (r).

Tableau 8 : Comparaison des 4 versions du modèle

| | Option européenne | Option américaine |
|--|---|---|
| | VA = 3 500 000 CI = 1800 000 t = 25 σ = 14,65% | VA = 3 500 000 CI = 1800 000 t = 25 σ = 14,65% |
| Scénario 1 : r=0 | Version 1 | Version 2 |
| Scénario 2 : r>0 | Version 3 | Version 4 |
| <ul style="list-style-type: none"> • r=2% • r=3,5% • r=5% • r=7% | | |

IV.4.1. Scénario 1 : déconsidération du taux d'intérêt sans risque

a) Pourquoi annuler le taux d'intérêt sans risque ?

POURQUOI ANNULER LE TAUX D'INTERET SANS RISQUE DANS LA METHODE PARAMETRIQUE ? Nous proposons d'expliquer la raison de l'annulation (r) en 3 étapes. La première étape consiste à interpréter la présence de (r) dans le modèle d'évaluation des options financières. La deuxième étape consiste à interpréter le maintien de (r) lorsque la formule a été exportée vers l'analyse par les options réelles. Enfin, la troisième étape consiste à expliquer pourquoi nous considérons un (r) nul en migrant vers l'évaluation du risque.

- **Rôle du taux d'intérêt sans risque dans les options financières**

Dans l'évaluation des options financières, on remarque que le modèle intègre les variables S_0 et K qui appartiennent à deux époques différentes (figure 15). En effet, le prix du marché S_0 est un prix actuel (t_0) tandis que le prix d'exercice K est une valeur du futur car elle servira à définir le Pay off de l'option à la maturité (t).

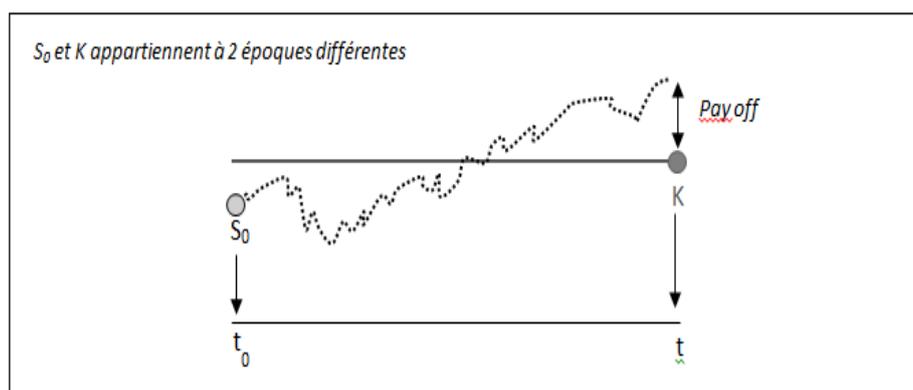


Figure 15 : Illustration du décalage temporel entre S_0 et K

Pour illustrer l'importance de ce décalage temporel, prenons le cas par exemple d'une option Put avec un prix de marché de $S_0 = 40$ et un prix d'exercice $K = 40$ (figure 16). Si le prix d'exercice est fixé à $K=40$ sur un horizon d'un trimestre, il y'a des chances importantes que le prix du marché diminue par rapport à $K=40$ (cône en gris). L'opportunité de cette option est alors significative. En revanche, si le prix d'exercice est fixé à $K=40$ sur un horizon de 20 ans, le prix du marché dans 20 ans sera très probablement passé à une autre grandeur sous l'effet de la capitalisation (inflation + coût du capital) et éventuellement d'un accroissement annuel qui lui

est spécifique. Il sera en l'occurrence vers 60 et la possibilité qu'il puisse passer en dessous de 40 sera moins évidente.

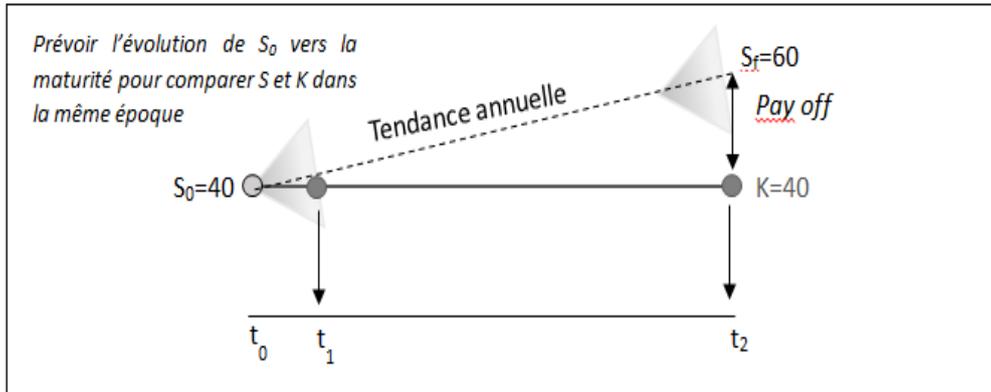


Figure 16 : Illustration chiffrée du décalage temporel entre S_0 et K

PREMIERE UTILISATION DE (R) : Pour tenir compte de ce décalage et comparer les prix S et K à la maturité, le modèle d'évaluation des options financières a prévu l'évolution tendancielle de S_0 vers la maturité par le terme $(r-\sigma^2/2)t$. Le prix déterministe de S à la maturité est donné par : $S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t}$ (figure 17).

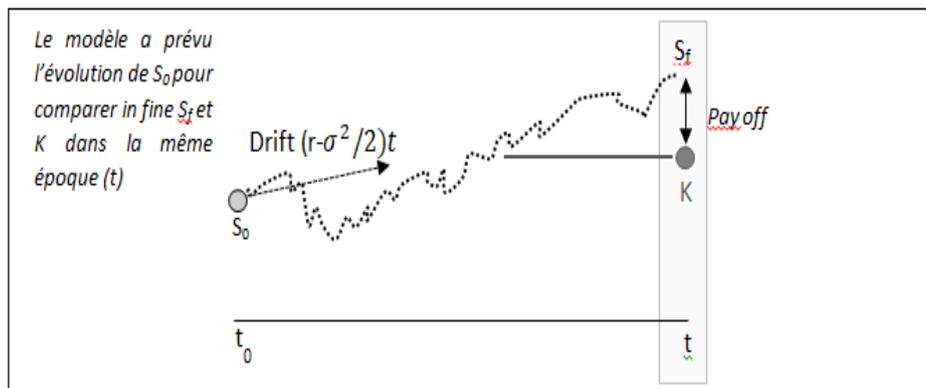


Figure 17 : Illustration de l'évolution de S_0 vers la maturité

DEUXIEME UTILISATION DE (R) : Une fois que la projection de S_0 a été simulée plusieurs fois vers la maturité, l'espérance des Pay off obtenus donne la valeur de l'option à la maturité. Celle-ci est ensuite actualisée vers le moment présent (t_0) par le terme (e^{-rt}) (figure 18).

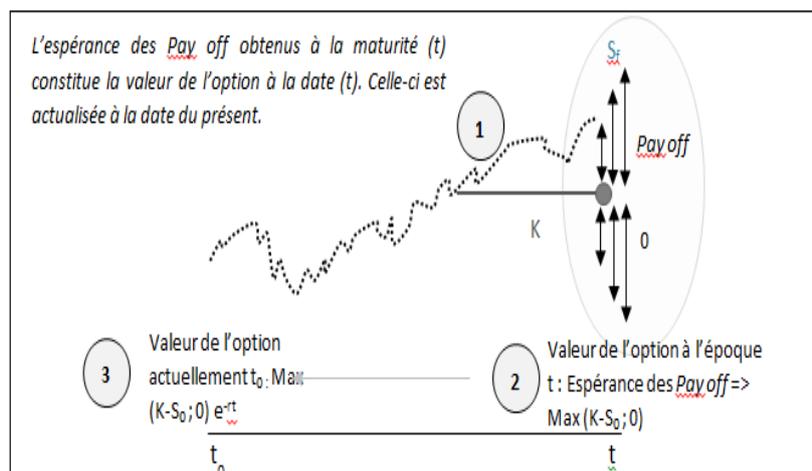


Figure 18 : Illustration du mouvement temporel dans le modèle d'évaluation des options financières

A QUEL MOMENT LE TAUX D'INTERET SANS RISQUE A-T-IL ETE UTILISE ? le modèle conventionnel (des options financières) a utilisé (r) dans un premier temps pour faire la projection de S_0 vers la maturité, et ainsi aligner S et K sur la même époque du Settlement (figure 18, étiquette 1). Il y'a donc un premier usage de (r) pour la capitalisation de S_0 . Une fois que l'espérance des Pay off a été obtenue dans le futur (étiquette 2), (r) a été utilisé une seconde fois pour actualiser la valeur de l'option vers le moment présent (étiquette 3), car le paiement de l'option se fait au présent. Il en ressort que le taux d'intérêt sans risque a pour rôle d'assurer le mouvement dans le temps de deux variables temporellement séparées (S_0 et K) en ramenant d'abord S_0 vers le futur, puis en ramenant la valeur de l'option obtenue vers le présent. Nous verrons par la suite en quoi la migration du concept des options vers l'évaluation du risque nécessite une adaptation du modèle au niveau de (r). En résumé :

Première utilisation de (r)
$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} W_t}$$

Deuxième utilisation de (r)
$$P = E [\text{Max} (0 ; K - S_t)] e^{-rt}$$

• **Rôle du taux d'intérêt sans risque dans les options réelles**

L'objectif de cette partie est d'illustrer le rôle de (r) dans l'évaluation des options réelles, avant de faire le parallèle avec l'évaluation de la RiVa. Prenons le cas d'une option d'expansion où l'on considère que le premier projet d'un programme est lancé à (t_0). Si sa VA atteint un niveau satisfaisant au temps (t) (par exemple après 5 ans), le deuxième projet du programme sera lancé. Dans le cas contraire ce deuxième projet sera suspendu. Nous sommes dans ce cas-ci en présence d'une option réelle Call avec la VA du premier projet comme prix du marché S_0 , et son niveau de rentabilité souhaité K en tant que prix d'exercice. Le Pay off attendu à la maturité sera la VAN du deuxième projet si celui-ci est lancé, ou zéro s'il est suspendu (figure 19).

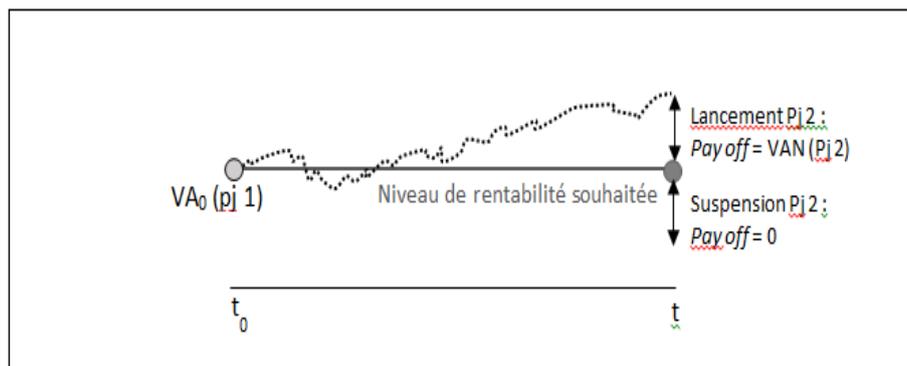


Figure 19 : Illustration d'une option réelle d'expansion

PREMIERE UTILISATION DE (R) : CAPITALISATION DE LA VA_0 (Pj 1) VERS LA MATURETE (T) POUR LA COMPARER AU NIVEAU RENTABILITE SOUHAITE A LA MEME EPOQUE (T): Pour tenir compte du décalage entre la VA_0 (Pj 1) qui est comptabilisée à l'époque (t_0), et le niveau de rentabilité souhaité K qui sera constaté à l'époque (t), le modèle d'évaluation des options réelles a prévu l'évolution tendancielle de VA_0 (Pj 1) vers la maturité par le terme $(r - \sigma^2/2)t$. Celui-ci se compose de la capitalisation (rt) et du déplacement log-normal de la moyenne dans le temps $(-\sigma^2/2)t$ (figure 20).

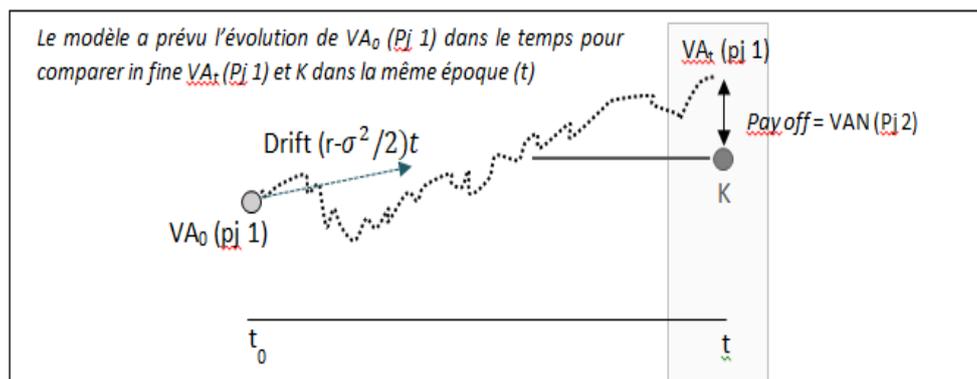


Figure 20 : Evolution de la VA_0 du projet 1 vers la maturité

DEUXIEME UTILISATION DE (R) : Une fois que la projection de VA₀ (Pj 1) a été simulée plusieurs fois vers la maturité, l'espérance des Pay off obtenus donne la valeur de l'option à la maturité. Celle-ci est actualisée vers le moment présent (t₀) par le terme (e^{-rt}) (figure 21).

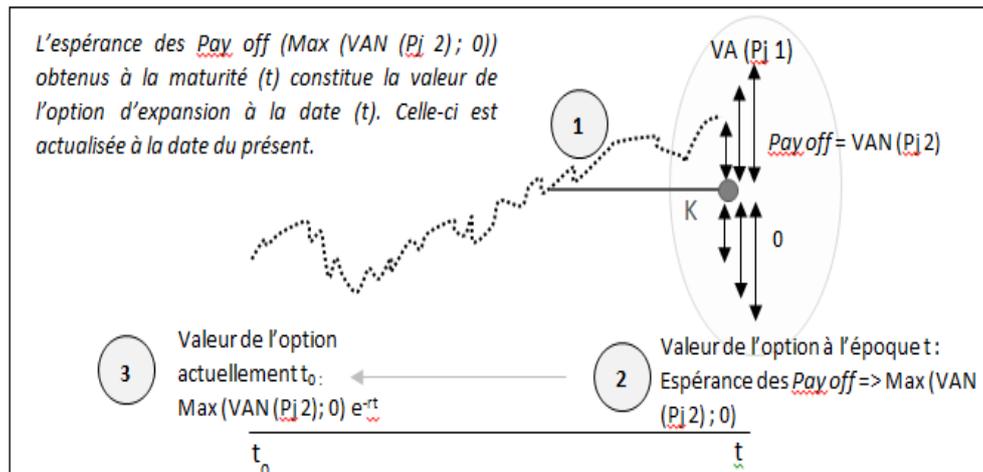


Figure 21 : Illustration du va-et-vient temporel dans le modèle d'évaluation des options réelles

A QUEL MOMENT LE TAUX D'INTERET SANS RISQUE A-T-IL ETE UTILISE ? le modèle a utilisé (r) dans un premier temps pour aligner la VA₀ (pj 1) sur l'époque du niveau de rentabilité souhaité K (figure 21, étiquette 1). Il y'a donc un premier usage de (r) pour la capitalisation de VA₀ (pj 1) vers l'époque (t). Une fois que l'espérance des Pay off a été obtenue dans le futur (étiquette 2), (r) a été utilisé une seconde fois pour actualiser la valeur de l'option vers le moment présent (étiquette 3). Il en ressort que le taux d'intérêt sans risque a pour rôle d'assurer la translation dans le temps en ramenant d'abord VA₀ (pj 1) vers le futur, puis en ramenant la valeur de l'option obtenue vers le présent. Nous verrons ci-après en quoi la migration du concept des options vers l'évaluation du risque nécessite une adaptation du modèle au niveau de (r).

Première utilisation de (r)
$$\text{VA}_{\text{pj1}}(t) = \text{VA}_{\text{pj1}}(t_0) e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} W_t}$$

Deuxième utilisation de (r)
$$P = E [\text{Max}(\text{VAN}(\text{Pj}2) - S_t)] e^{-rt}$$

• **Adaptation du taux d'intérêt sans risque dans l'évaluation du risque**

Nous avons présenté ci-dessus les raisons qui expliquent l'insertion de (r) dans le modèle d'évaluation des options financières et réelles. La RiVa que nous proposons rejoint les options financières et réelles au niveau de l'architecture du modèle, mais elle s'inscrit dans un paradigme différent, d'où la légitimité de procéder aux ajustements nécessaires. Les variables que nous utilisons sont la VA en lieu de S₀ et CI en lieu de K. Nous remarquons que contrairement aux options financières et aux options réelles, la VA et le CI appartiennent à la même époque. Le CI du projet est exprimé en valeur du présent (figure 22), contrairement à K dans les options financières et réelles qui est une valeur référence du futur.

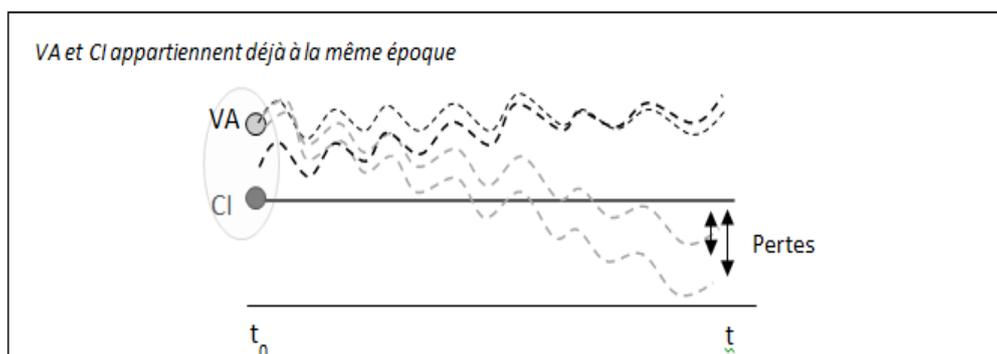


Figure 22 : Illustration de l'alignement temporel entre VA et CI

Cela dit, c'est la capitalisation de la VA vers le futur prévue par le modèle de base qui créera le décalage temporel et donnera lieu à des résultats erronés, que nous présenterons dans le scénario 2. Ainsi, pour adapter le modèle des options à l'évaluation du risque, trois solutions identiques s'offrent à nous :

1. Capitaliser à la fois la VA et le CI vers la maturité (t), obtenir la valeur du risque à l'époque (t), puis actualiser la valeur du risque vers l'instant présent (figure 23).
2. Projeter la VA dans le temps suivant seulement le déplacement log-normal de la moyenne $e^{(-\sigma^2/2)t}$, sans capitaliser e^{rt} ni la VA ni le CI. La valeur du risque obtenue correspondra déjà au présent. Ce chemin aboutit au même résultat que le premier car il ne fait que simplifier mathématiquement la capitalisation des deux variables avec l'actualisation du résultat.
3. Attribuer $r=0$ ou supprimer tous les r et ses facteurs dans le modèle Black-Scholes.

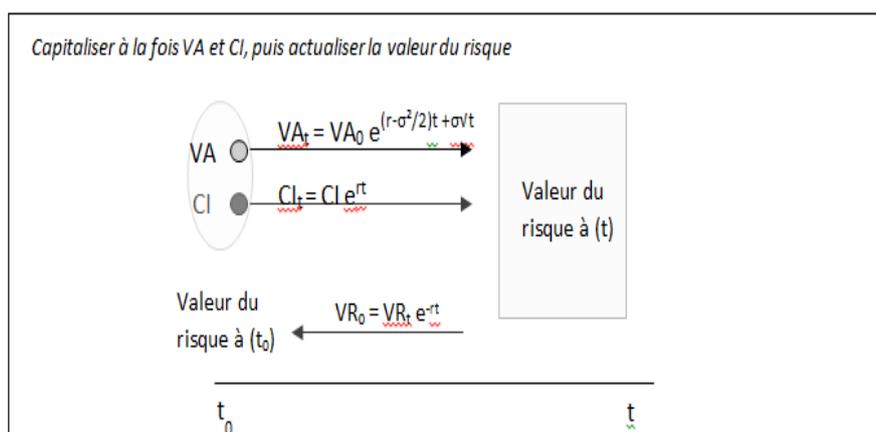


Figure 23 : Illustration de l'adaptation du modèle aux époques de VA et CI

Nous avons transcrit cette modification que nous avons apportée à la méthode d'évaluation par la simulation du mouvement brownien géométrique vers la formule Black-Scholes. La première solution se concrétisera par la capitalisation de CI au niveau de la formule, ce qui donnera l'expression suivante :

$$P = K e^{-rt} e^{rt} \phi(-d_2) - S_0 \phi(-d_1)$$

Soit :
$$P = K \phi(-d_2) - S_0 \phi(-d_1)$$

La deuxième solution est de donner $r=0$ dans la formule Black-Scholes, ce qui affectera également les (r) compris dans les termes d_1 et d_2 . Le résultat obtenu est identique à la première solution et aux résultats obtenus en simulant le mouvement brownien géométrique.

b) Résultats du scénario 1

Le modèle d'option européenne sans considération du (r) est le modèle définitif, que nous avons présenté dans la partie précédente avec un ensemble de simulations. Nous avons refait les mêmes simulations en version américaine, en utilisant les approximations de BaroneAdesi-Whaley (BAW) et de Bjerksund-Stensland 2002 (BS2002). Les résultats obtenus avec ces deux formules sont exactement les mêmes que ceux du modèle européen. L'annulation du (r) a été à l'origine de cette similitude. Quoique le choix de l'option européenne ait été argumenté et défendu dans la partie méthodologie, la question ne se pose plus dès lors que les résultats des deux versions 1 et 2 sont identiques.

Tableau 9 : Comparaison des résultats de la simulation de la VA en type européen et américain

| Variation de la Valeur Actualisée | 0% | 20% | 40% | 60% | 80% | 100% | 120% | 140% | 160% | 180% | 200% |
|-----------------------------------|------|------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| Valeur du Risque (Milliers DH) | | | | | | | | | | | |
| Black-Scholes | 1800 | 1136 | 682 | 418 | 265 | 174 | 117 | 81 | 58 | 42 | 30 |
| Barone-AdesiWhaley | 1800 | 1136 | 682 | 418 | 265 | 174 | 117 | 81 | 58 | 42 | 30 |
| Bjerksund-Stensland 2002 | 1800 | 1136 | 682 | 418 | 265 | 174 | 117 | 81 | 58 | 42 | 30 |

Tableau 10 : Comparaison des résultats de la simulation de la maturité en type européen et américain

| Maturité | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
|--------------------------------|---|------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Valeur du Risque (Milliers DH) | | | | | | | | | | | |
| Black-Scholes | 0 | 0,86 | 11 | 31 | 55 | 82 | 110 | 137 | 165 | 192 | 219 |
| Barone-AdesiWhaley | 0 | 0,86 | 11 | 31 | 55 | 82 | 110 | 137 | 165 | 192 | 219 |
| Bjerksund-Stensland 2002 | 0 | 0,86 | 11 | 31 | 55 | 82 | 110 | 137 | 165 | 192 | 219 |

Tableau 11 : Comparaison des résultats de la simulation de la volatilité en type européen et américain

| Variation de la volatilité | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
|--------------------------------|----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| Valeur du Risque (Milliers DH) | | | | | | | | | | | |
| Black-Scholes | 0 | 52 | 355 | 710 | 1026 | 1281 | 1470 | 1601 | 1687 | 1739 | 1769 |
| Barone-AdesiWhaley | 0 | 52 | 355 | 710 | 1026 | 1281 | 1470 | 1601 | 1687 | 1739 | 1769 |
| Bjerksund-Stensland 2002 | 0 | 52 | 355 | 710 | 1026 | 1281 | 1470 | 1601 | 1687 | 1739 | 1769 |

IV.4.2. Scénario 2 : maintien du taux d'intérêt sans risque

a) Variation de la Valeur Actualisée

- **Option européenne**

La figure 24 montre l'évolution de la valeur du risque en mesure européenne suivant la variation de la VA, aussi bien pour la version 1 ($r=0$) (version retenue) que la version 3 ($r= 2\% ; 3,5\% ; 5\% ; 7\%$). Il apparaît tout d'abord que le niveau du risque change considérablement avec le changement de l'hypothèse de (r). Le risque maximal, qui s'aligne logiquement sur le niveau de CI dans la version 1, affiche un niveau nettement inférieur à CI au fur que (r) augmente. Supposons que la valeur du risque que nous proposons soit utilisée pour évaluer une assurance sur les projets. Si la valeur maximale du risque est évaluée en-dessous de CI, le manager peut lancer un projet perdant à 100% avec un $CI=100$, payer une assurance maximale à 80, puis répéter l'opération indéfiniment. La valeur du risque que nous proposons ne doit pas offrir une pareille opportunité d'arbitrage, ce qui conforte la thèse de la version 1 avec $r=0$.

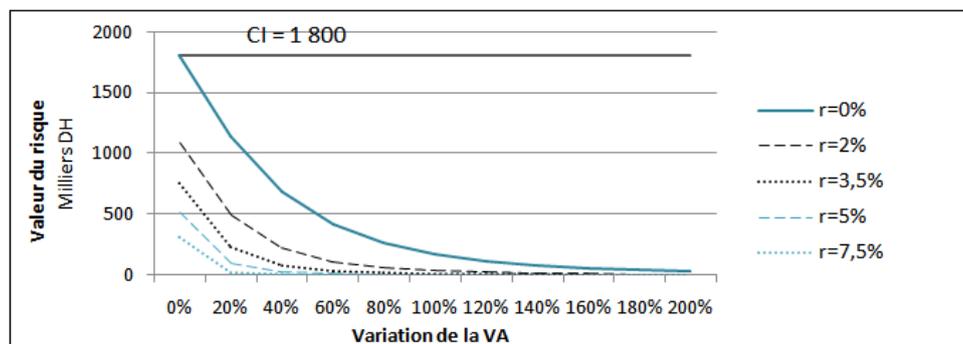


Figure 24 : Evolution de la RiVa (type Eur) suivant VA à différents niveaux de (r)

- **Option américaine**

La figure 25 montre l'évolution de la valeur du risque en option américaine par l'approximation de Barone-AdesiWhaley(BAW) suivant la variation de la VA, aussi bien pour la version 2 ($r=0$) (version retenue) que la version 4 ($r= 2\% ; 3,5\% ; 5\% ; 7\%$). Il apparaît que la valeur du risque diminue avec l'augmentation de (r), mais à la différence (par rapport à la mesure européenne) que les extrémités se conservent : le risque maximal vaut CI et le risque minimal tend vers zéro. Dans ces conditions, plus (r) augmente, plus la courbe devient coudée.

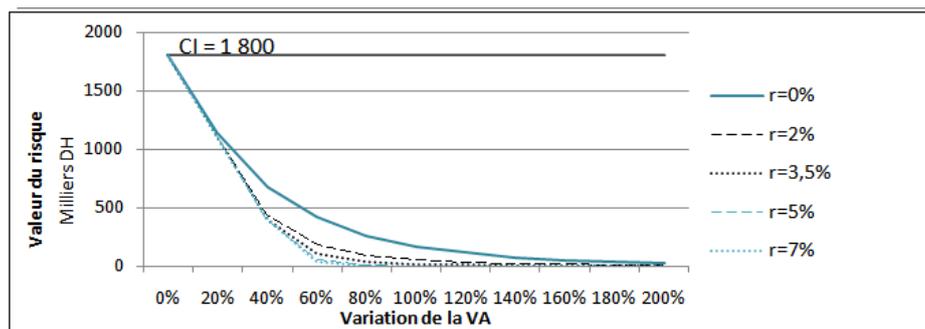


Figure 25 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BAW) suivant VA à différents niveaux de (r)

La figure 26 est l'homologue de la précédente, obtenue par l'approximation de Bjerkstrand-Stensland de 2002 (BS2002). On observe les mêmes allures que celles de la formule BAW à l'exception de la série correspondante à $r=7\%$ qui semble définir une limite à l'usage de cette formule.

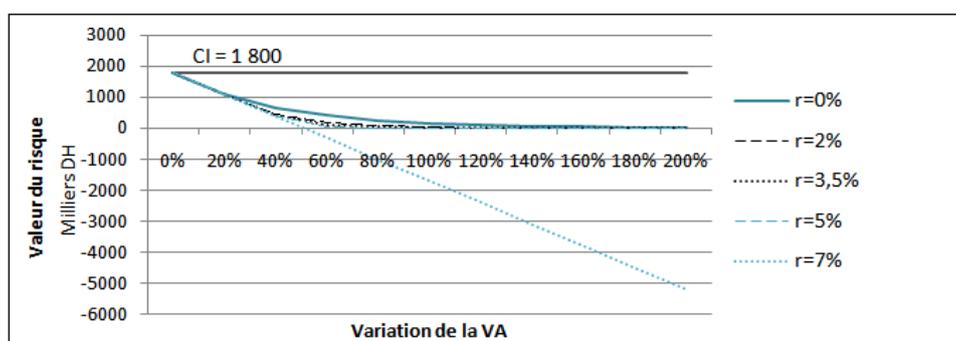


Figure 26 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BS2002) suivant VA à différents niveaux de (r)

b) Variation de la maturité

• Option européenne

La figure 27 montre que l'effet de la maturité sur la valeur du risque est significatif à $r=0$ (version 1 : retenue) et non-significatif pour les autres valeurs de (r) (version 3). Il apparaît visuellement qu'à partir de la 12^e année, la valeur du risque se démarque entre $r=0$ et les sous-versions $r>0$. Cela revient au fait que le taux d'intérêt sans risque entraîne la valeur de VA vers le haut avec le temps, si bien que le risque de baisse en dessous de CI devient négligeable. Pour que la pente des courbes correspondantes aux scénarios $r>0$ soit plus relevée, il faudrait que la volatilité soit plus élevée de sorte à alimenter le risque malgré l'accroissement de la VA.

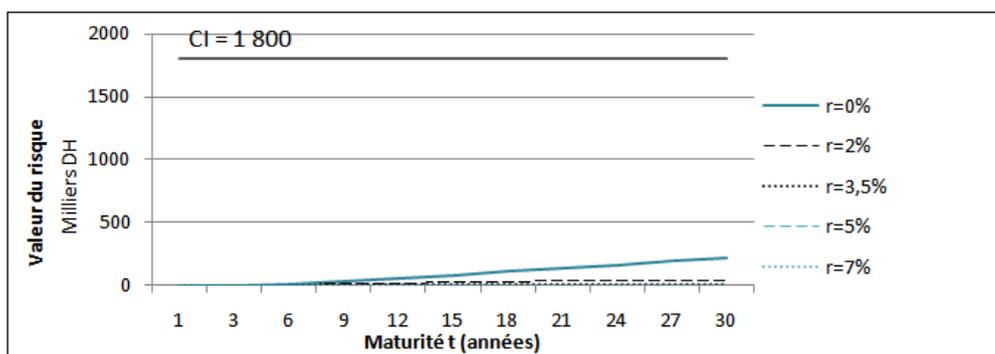


Figure 27 : Evolution de la RiVa (type Eur) suivant (t) à différents niveaux de (r)

• Option américaine

Les figures 28 et 29 montrent que l'effet de la maturité sur la valeur du risque en mesure américaine (BAW et BS2002) est significative à $r=0$ (version 2 : retenue, et équivalente à la version 1 européenne) et non-significative pour les autres valeurs de (r). La formule BS 2002 laisse de nouveau apparaître une limite au niveau de $r=7\%$.

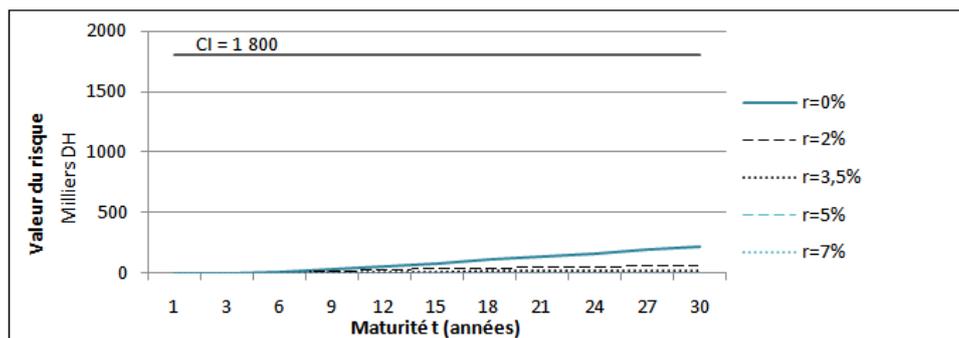


Figure 28 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BAW) suivant (t) à différents niveaux de (r)

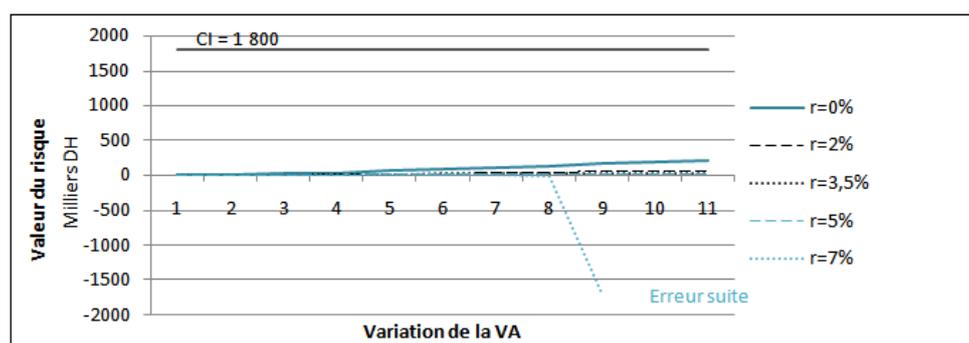


Figure 29 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BS2002) suivant (t) à différents niveaux de (r)

c) Variation de la Volatilité

• Option européenne

En faisant varier la volatilité de 0% à 100%, la valeur du risque plafonne à CI pour $r=0$ (version1), mais elle stagne à des niveaux inférieurs pour les autres valeurs de (r) (version 3). On remarque également que les différentes courbes sont assez espacées pour le type européen (figure 30), alors qu'elles sont plus resserrées pour le type américain (figures 31 et 32).

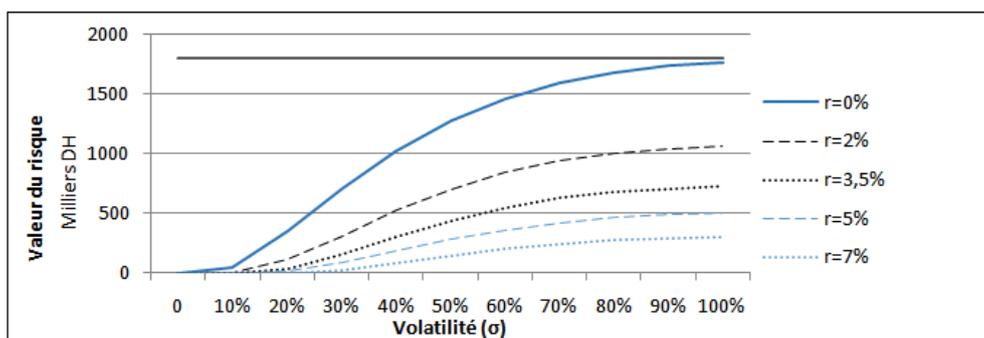


Figure 30 : Evolution de la RiVa (type Eur) suivant (σ) à différents niveaux de (r)

• Option américaine

En faisant varier la volatilité de 0% à 100%, la valeur du risque plafonne à CI pour $r=0$ (version2), mais elle stagne à des niveaux inférieurs pour les autres valeurs de (r) (version 4). Les courbes ne sont pas autant espacées que celles du type européen car avec la possibilité d'exercer à tout moment, l'option américaine intègre l'exercice d'option à mi-parcours, ce qui réduit l'amplitude du risque.

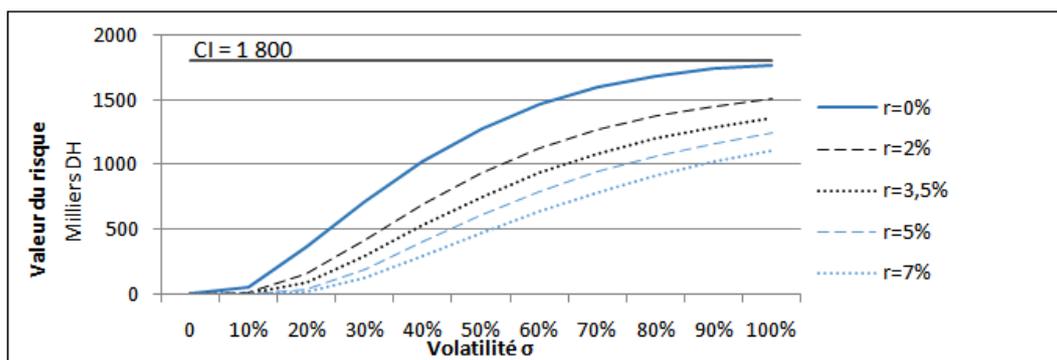


Figure 31 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BAW) suivant (σ) à différents niveaux de (r)

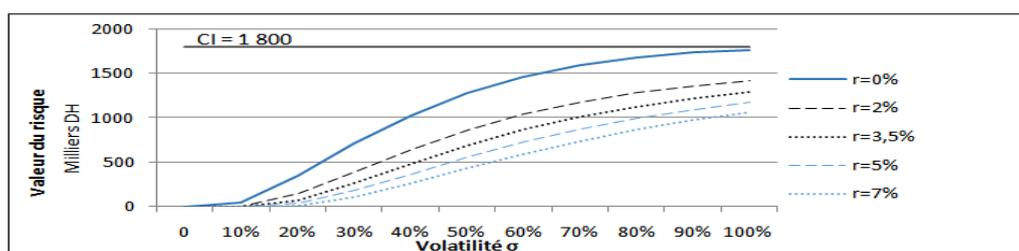


Figure 32 : Evolution de la RiVa (type Ame) (BS2002) suivant (σ) à différents niveaux de (r)

V. Illustration De L'interet De La Psv Par La Comparaison De Projets

Pour illustrer l'intérêt de la PSV, nous allons comparer sommairement plusieurs projets hypothétiques de sorte à créer plusieurs cas de figures, les plus divers qui soient. Le tableau 12 décrit les valeurs des variables du modèle pour les projets dénommés A, B, C, D, E, F, G, H. **i**) Les projets B, C et D ne diffèrent du projet A que par une seule variable. Le classement de leurs risques respectifs est donc prévisible. Le projet B, avec une VA supérieure, CeterisParibus, aura un risque inférieur à celui du projet A. Le projet C, avec un CI supérieur, CeterisParibus, aura un risque supérieur à celui du projet A. Quant au projet D, avec une volatilité supérieure, CeterisParibus, aura un risque supérieur à celui du projet A. La simulation de Monte Carlo montre effectivement que les projets C et D ont des probabilités d'échec supérieures à celle du projet A (respectivement 41,6%, 36,4% et 30,7%), et que le projet B a la probabilité d'échec la plus faible (20,4%) (Tableau 34). Comme attendu, la RiVa que nous avons calculé pour les projets A→D respecte le même classement des projets (C, D, A, B par ordre de risque croissant), en intégrant en sus la sévérité des pertes qui n'apparaît pas dans les probabilités d'échec.

Tableau 12 : présentation des variables des projets A, B, C, D, E, F, G, H

| Projet A | Projet B | Projet C | Projet D |
|---|---|---|--|
| VA = 13 693 CI = 9550 σ = 15,30% | VA = 16 000 CI = 9550 σ = 15,30% | VA = 13 693 CI = 11 000 σ = 15,30% | VA = 13 693 CI = 9550 σ = 18% |
| Projet E | Projet F | Projet G | Projet H |
| VA = 15 000 CI = 9550 σ = 23% | VA = 15 000 CI = 9550 σ = 30% | VA = 12 000 CI = 9550 σ = 15,30% | VA = 13 000 CI = 9550 σ = 25% |

Tableau 13 : comparaison des résultats des projets A, B, C, D, E, F, G, H

| Projet A | Projet B | Projet C | Projet D |
|--|--|--|--|
| VAN = 4 420 % d'échec = 30,7% RiVa = 720 PSV = 3 700 RPR = 16,3% | VAN = 6 727 % d'échec = 20,4% RiVa = 430 PSV = 6 297 RPR = 6,4% | VAN = 2 970 % d'échec = 41,6% RiVa = 1 246 PSV = 1 724 RPR = 42,0% | VAN = 4 420 % d'échec = 36,4% RiVa = 1 017 PSV = 3 403 RPR = 23% |
| Projet E | Projet F | Projet G | Projet H |
| VAN = 5 727 % d'échec = 39,8% RiVa = 1 369 PSV = 4 358 RPR = 23,9% | VAN = 5 727 % d'échec = 50% RiVa = 2 204 PSV = 3 523 RPR = 38,5% | VAN = 2 727 % d'échec = 40,9% RiVa = 1 054 PSV = 1 673 RPR = 38,7% | VAN = 3 727 % d'échec = 50,3% RiVa = 1 985 PSV = 1 742 RPR = 53,3% |

ii) Les projets E, F, G et H que nous allons comparer présentent deux variations antagonistes qui rendent la comparaison par les méthodes conventionnelles plus difficile, justifiant l'utilisation de la PSV dans les cas similaires.

QUE CHOISIR ENTRE LE PROJET A ET LE PROJET E ? A partir des indicateurs conventionnels, le projet E est le plus rentable ($VAN(E) = 5\,727$ contre $VAN(A) = 4\,420$ KDH), mais il est en même temps le plus risqué (~40% d'échec contre ~31% d'échec). Le choix d'investissement s'avère délicat tant que l'analyste est confronté à deux unités différentes (rentabilité en monnaie et risque en pourcentage) et n'arrive pas à les combiner. Quel projet est le plus avantageux ? Celui qui a une rentabilité additionnelle de 1 307 KDH, ou celui qui a ~10% de chances de succès supplémentaires ? Est-ce que les pertes possibles de l'un et de l'autre ont la même sévérité ? Les PSV permettent de convertir le risque en unité financière et de faire cette comparaison avec aisance. Il ressort que le projet E a une PSV plus intéressante que celle du projet A (4 358 contre 3 700 KDH), et par conséquent la prise de risque supplémentaire par le choix du projet E est justifiée par une rentabilité suffisante. Ainsi, sur le plan arithmétique, le projet E est plus profitable compte tenu de son risque. Toutefois, d'une perspective géométrique, le risque du projet E représente un pourcentage plus important de la VAN espérée par rapport au projet A.

QUE CHOISIR ENTRE LE PROJET A ET LE PROJET F ? A partir des indicateurs conventionnels, le projet F est le plus rentable ($VAN(F) = 5\,727$ contre $VAN(A) = 4\,420$ KDH), mais il est en même temps le plus risqué (~50% d'échec contre ~31% d'échec). Le tableau 12 montre que sa volatilité est deux fois supérieure à celle du projet A. Le bénéfice supplémentaire proposé par le projet F mérite-t-il cette prise de risque ? Il ressort du calcul des PSV que le projet A est le plus opportun (3 700 contre 3 523 KDH), car le risque supplémentaire porté par le projet F dépasse son bénéfice supplémentaire. Ainsi, sur le plan arithmétique, le projet A est plus profitable compte tenu de son risque. En outre, d'une perspective géométrique, le risque du projet A représente un pourcentage de la VAN espérée qui est avantageux à celui du projet F.

QUE CHOISIR ENTRE LE PROJET G ET LE PROJET H ? A partir des indicateurs conventionnels, le projet H est le plus rentable ($VAN(H) = 3\,727$ contre $VAN(G) = 2\,727$ KDH), mais il est en même temps le plus risqué (~50,3% d'échec contre ~40,9% d'échec). Le tableau 12 montre que sa volatilité est supérieure à celle du projet G de 10%. Est-ce que la rentabilité additionnelle du projet H (1 000 KDH) mérite cette prise de risque ? Les PSV font ressortir une légère préférence pour le projet H. Ainsi, sur le plan arithmétique, le projet H est plus profitable compte tenu de son risque. Toutefois, d'une perspective géométrique, le risque du projet H représente un pourcentage plus important de la VAN espérée par rapport au projet G.

References Bibliographiques

- [1]. Barone-Adesi G., Whaley R.E. (1987). Efficient analytic approximation of American option values. The journal of finance, volume 42, Issue 2, p.301-320.
- [2]. Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. The Journal of Political Economy, vol.81, N°3, p.637-654.
- [3]. Bjerksund P., Stensland G. (2006). Closed form spread option valuation. Department of Finance, NHH Helleveien 30, N-5045 Bergen, Norway, p.2-7.
- [4]. Datar V., Mathews S. (2005). Datar-Mathews method for quantitative real option value. U.S. Patent 6862579, filed July 10, 2002, and issued March 1, 2005.
- [5]. Lahrech M. T. (2019). Conception des indicateurs RiVa (Risk-Value), PSV (Project SafeValue) et RPR (Risk-ProfitabilityRatio) pour l'évaluation du risque dans les projets d'investissement. Thèse de doctorat, ISBN : 978-9920-782-00-5, Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II.
- [6]. Markowitz H.M. (1990). Foundation of Portfolio Theory. Nobel Lecture, December 7, 1990, Baruch College, The City University of New York, New York.

Dr. Mohamed Taha Lahrech" Conception Des Indicateurs Riva (Risk-Value), Psv (Project Safe Value) Et Rpr (Risk- Profitability Ratio) Pour L'evaluation Des Risques En Projets D'investissement" IOSR Journal of Economics and Finance (IOSR-JEF) , vol. 10, no. 5, 2019, pp. 29-51.